UNIVERSITÉ LUMIÈRE – LYON II

# THESE

pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ LUMIÈRE – LYON II
Ecole doctorale de Science de l'Éducation

**Spécialité : Didactique des mathématiques**

*****

**Evolutions récentes de l'enseignement de la notion de fonction en France en classe de seconde**
**Utilisation des tableaux de valeurs et de variations**

*****

Présentée et soutenue publiquement par

**İlyas YAVUZ**

Le 2 juin 2005

Thèse dirigée par Jean-Luc DORIER et Sylvie COPPE

Composition du jury :

| | |
|---|---|
| **Colette LABORDE** | Rapporteur |
| **Marie-Jeanne PERRIN-GLORIAN** | Rapporteur |
| **Robert BOUCHARD** | Examinateur |
| **Jean-Luc DORIER** | Directeur de thèse |
| **Sylvie COPPE** | Co-directeur de thèse |

# Remerciements

Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribué de près comme de loin à ce travail et sans qui cette thèse n’aurait probablement jamais pu voir le jour.

En tout premier lieu, je tiens à remercier Jean-Luc Dorier et Sylvie Coppé d’avoir accepté de co-diriger ce travail. Je les remercie de m’avoir aidée avec tant de générosité, à découvrir l’univers de la recherche en didactique des mathématiques. Ses conseils et ses encouragements m’ont soutenu tout au long de ces quatre années et m’ont permis de mener cette recherche à son terme. Je leur suis également reconnaissant pour les échanges humains, leur amitié et leurs attentions que je ne suis jamais prêt d’oublier.

Je remercie également Collette Laborde et Marie-Jeanne Perrin de s’être rendus disponibles pour être rapporteurs de ma thèse et pour leurs questions qui m’ont fait entrevoir des chemins possibles dans la poursuite de mon travail.

J’adresse mes remerciements aux enseignants et aux élèves qui ont contribué à la réussite de mon expérimentation.

Je tiens aussi à remercier toutes les personnes du laboratoire ICAR pour leurs précieux conseils et les nombreux services qu’ils m’ont rendus.

Enfin, j’exprime ma profonde gratitude à ma femme qui a partagé avec moi tous les moments de joie et de peine et qui a su m’insuffler l’énergie nécessaire pour accomplir avec succès mon travail de thèse.

Merci à tous mes proches qui font ce que je suis : mon père, ma mère, mes frères et mes sœurs et la famille de mon épouse. Merci à mes nièces et mes neveux : Kevser, Elveda, Gökçen, Nihal… et tous ce que j’oublie MERCI.

# Table des matières

# PARTIE A

## INTRODUCTION PROBLEMATIQUE ET CADRE THEORIQUE

# CHAPITRE A

# INTRODUCTION PROBLEMATIQUE ET CADRE THEORIQUE

## I. Introduction

Cette thèse, consacrée à l'évolution récente de l'enseignement des fonctions en France, s'inscrit dans le prolongement de notre étude de DEA portant sur les procédures utilisées par les élèves de seconde professionnelle dans les changements de registres de représentation sémiotique. Ce travail se limitait à l'étude des registres algébriques et graphiques. Lors de cette étude, nous avions dégagé les erreurs fréquemment commises par les élèves dans le traitement de ces registres ainsi que lors de conversions. Cette première analyse ne nous a pas permis de remonter aux causes profondes de ces erreurs. Nous avons ainsi décidé de continuer notre recherche sur le même concept pour arriver à trouver les raisons de ces dysfonctionnements de l'apprentissage de la notion de fonction en élargissant notre étude à d'autres modes de représentations.

Notre première idée était de faire une analyse comparative de l'enseignement de la fonction en France et en Turquie. Il y avait là bien sûr un intérêt culturel du fait de notre origine turque et du peu de travaux didactiques en Turquie. Nous avons donc fait un rapide tour d'horizon de l'enseignement des fonctions dans chacun des deux systèmes d'enseignement : français et turc. Pour faire cela, nous avions choisi les classes de seconde, soit la classe de base pour l'introduction d'un concept général de la fonction dans les deux institutions, Par la suite, les fonctions apparaissent dans toutes les sections de Premières et de Terminales dans les deux pays. Il s'agit donc, en classe de Seconde, de poser les bases de cette notion et de faire en sorte que l'élève ait, en sortant de cette classe, une idée des connaissances  de ce qu'est une fonction.

Nous avons tout d'abord analysé succinctement les programmes et les manuels officiels de second cycle en Turquie, ce que nous présentons brièvement, ci-dessous.

***L'enseignement actuel des fonctions en Turquie***

Contrairement à la France, les programmes officiels turcs sont très courts ; on annonce simplement des objectifs et des compétences exigibles sans les détailler. On trouve très rarement des commentaires, des explications et des exemples.

Voici un extrait du programme de Seconde traduit en français:

CHAPITRE III : CORRESPONDANCE, FONCTION, OPERATION[1]

OBJECTIF N° 5 : Comprendre la notion de fonction, ses caractéristiques et les propriétés particulières des fonctions.

COMPETENCE :

1. Définir la fonction et la représenter graphiquement à partir d'ensembles
2. Définir l'ensemble de définition, l'ensemble image et l'ensemble d'arrivée.
3. Définir la représentation graphique d'une fonction dans un repère orthonormé.
4. Définir l'égalité des deux fonctions.
5. Définir les fonctions injectives, surjectives, non surjectives et déterminer leurs différences l'une par rapport à l'autre.
6. Définir les ensembles infinis.
7. Expliquer l'équipotente des deux ensembles.
8. Définir la fonction identique.
9. Définir la fonction constante.
10. Définir la fonction nulle.

La notion de fonction est introduite pour la première fois en classe de seconde. A ce niveau, l'élève rencontre la définition d'une fonction, des propriétés particulières des fonctions et des fonctions du seconde degré, la composition des fonctions et la définition de l'inverse d'une fonction. Dans cette classe, on traite aussi des « polynômes », dans un chapitre ultérieur, et on revoit alors la notion de fonction.

En classe de première, l'élève découvre les fonctions trigonométriques, logarithmiques, exponentielles et les fonctions de permutations. Les variations de fonctions ne sont abordées que dans le programme de terminale. Les fonctions paires et impaires, les quatre opérations sur les fonctions, des fonctions particulières (fonction définie par morceaux, fonction 'valeur absolue', fonction 'signe' ($y = signf(x)$) et fonction 'valeur entière' ($f(x) = E(x)$)) figurent aussi dans le programme de terminale. Par ailleurs, en terminale, l'élève continue à utiliser la notion de fonction en travaillant sur les limites, la continuité et les dérivées des fonctions.

Dans le programme officiel de la classe de seconde, les fonctions sont mises en place en même temps que les notions de correspondance entre ensembles et de loi de composition interne[2], ceci dans un même chapitre. Il n'y a aucune indication explicite sur la façon de définir « une fonction ». Cependant, le fait que des éléments sur les ensembles et sur les correspondances entre ensembles précèdent l'étude des fonctions montre que leur définition de celles-ci se construira certainement de façon ensembliste en liaison avec la notion de relation. Dans ce cadre, on attend des élèves de pouvoir définir les fonctions à partir d'ensembles, l'ensemble de définition, l'ensemble d'arrivée, l'ensemble image et de les représenter graphiquement (par exemple avec des diagrammes sagittaux). De plus, l'élève est aussi amené à chercher si une correspondance donnée est une fonction. Ceci est confirmé dans le manuel officiel de seconde, les fonctions sont étudiées sous le chapitre « Relation,

[1] Dans ce chapitre il y a dix objectifs dont quatre sont liés à la notion de fonction. Nous ne citons que l'objectif n°5 en détail (avec les compétences). Les autres objectifs sont les suivants :
OBJECTIF N°6 : Faire des applications liées aux fonctions et propriétés particulières des fonctions.
OBJECTIF N°9 : Comprendre la composition des fonctions et ses propriétés dans l'ensemble des fonctions.
OBJECTIF N°10 : Faire des opérations dans l'ensemble des fonctions.

[2] Soit A un ensemble non vide. Chaque fonction définie d'un sous-ensemble quelconque non vide de AXA vers A est appelée « loi de composition interne» sur A.

Fonction, Opération ». La présence ensemble de ces sections nous indique d'emblée dans quelle logique sont conçus les débuts de l'enseignement sur les fonctions. Fonctions et relations sont clairement liées sur la base de la logique ensembliste. Par exemple, on trouve dans le manuel officiel la définition suivante :

> « Soit A et B deux ensembles non vides. Une fonction est une relation qui associe à chacun des éléments de A un et un seul élément de B. »

Dans le programme de seconde, on trouve aussi quelques propriétés des fonctions. On demande ainsi de définir les fonctions injectives, surjectives, non surjectives, la fonction identique, les fonction constantes et la fonction nulle, mais les fonctions linéaires et affines ne sont pas introduites. Le programme a enfin pour objectif de définir la composition des fonctions et de montrer que cette opération est associative et non commutative.

D'autre part, comme Basturk (2003) l'a montré, l'enseignement des mathématiques en Turquie est aussi très pauvre du point de vue des changements de cadres. Le contenu du concours[3] et des manuels est très algébrique et il n'y a qu'un très petit nombre de situations qui demandent des changements de cadre, de point de vue, de penser et de dire autrement.

Nous pensons que l'enseignement du dersané[4] (ou un enseignement très proche du concours) et l'importance du concours ont des influences néfastes sur l'enseignement du lycée, qui le rend moins cohérent. En particulier, les enseignants sont contraints de proposer des exercices hors programme et à privilégier les procédures les plus adéquates au concours.

Cette première lecture du programme nous a amené à constater que l'enseignement des fonctions en Turquie correspondait plus ou moins à ce qui se faisait en France avant les années 80.

Le fait que la conception de la fonction en tant que loi de variation ne soit envisagée dans le système d'enseignement turc, qu'au niveau de la classe de terminale et uniquement par l'intermédiaire du théorème liant sens de variation et signe de la dérivée, nous a obligé à abandonner l'idée d'une comparaison avec la France. En, effet, pour que la comparaison soit possible, nous devions élargir notre étude pour inclure les classes de première et de terminale, ce qui dépassait la faisabilité dans le cadre d'un travail de doctorat.

Il nous a alors semblé plus pertinent de nous centrer sur l'enseignement français. Au vu des écarts avec la situation turque, les questions qui nous ont alors préoccupé étaient de déterminer la nature des évolutions récentes des programmes français sur la notion de fonction en classe de seconde, les raisons et les conditions écologiques de ces évolutions, ainsi que la viabilité des nouveautés introduites dans les dernières réformes.

---

[3] En Turquie, pour commencer leurs études supérieures, les élèves doivent, à la fin du lycée, passer un examen qui est préparé par le Centre de Sélection et d'Installation des Etudiants. Ce concours se déroule une fois par an et consiste en une éprouve unique comprenant tous les sujets. Cette épreuve est constituée de 188 questions à choix multiplies (cinq choix par question) et les élèves doivent répondre en trois heures.

[4] Ce sont des établissements privés qui ont pour mission de renforcer ou de soutenir les élèves (faibles ou non !) dans l'enseignement secondaire et de préparer les élèves au concours d'entrée à l'université et aux autres concours (par exemple, aux concours de lycées privés, de lycées anatoliens, de lycées scientifiques, etc.). Actuellement les dersanés occupent une grande place et jouent un rôle très important.

Un survol de cette évolution, montre un renforcement progressif de l'utilisation des divers modes de représentation des fonctions, en même temps qu'une diminution de l'importance de la représentation algébrique. D'autre part, nous avons constaté que les objets tableau de valeurs et tableau de variations ont pris dans cette évolution une importance croissante et ont gagné en autonomie. A titre d'exemple, voici un extrait du programme actuel de Seconde :

> « Identifier la variable et son ensemble de définition pour une fonction définie par une courbe, **un tableau de données** ou une formule »
> « Décrire, avec un vocabulaire adapté ou un tableau de variations, le comportement d'une fonction définie par une courbe. Dessiner une représentation graphique compatible avec **un tableau de variations** »[5] (Programme de Seconde, 2000)

Ainsi, pour la première fois, on demande de définir une fonction à partir d'un tableau de valeurs et on parle explicitement du passage d'un tableau de variations à une représentation graphique (ces types de tâches n'étaient jamais explicites dans les programmes antérieurs, même s'ils ont pu à certaines époques correspondre à une pratique effective).

Nous avons alors choisi de privilégier l'étude de l'utilisation de ces deux objets, et de leur liens avec les autres modes de représentation dans nos analyses.

Il est alors légitime de se demander quels ont été les objectifs des concepteurs des programmes en donnant un statut important à ces objets ? Quelles sont les conditions qui permettent de faire vivre le tableau de valeurs et le tableau de variations et sous quelles formes ? Comment ces objets donnent-ils du sens aux notions en jeu ? Quel est le domaine de fonctionnement de ces objets ? Quelles sont les relations entre ces deux types de tableau et les autres modes de représentation en classe de Seconde ? Comment prennent-ils leur place dans les pratiques des professeurs et dans les activités des élèves ?

Ces questions ont été à la base de notre problématique et ont guidé les choix théoriques et méthodologiques que nous allons maintenant présenter.

[5] C'est nous qui soulignons.

# II. Problématique et cadre théorique

Dans ce paragraphe, nous allons tout d'abord situer nos questions dans un cadre d'étude général, expliciter les raisons détaillées qui nous ont conduit à choisir les objets tableau de valeurs et tableau de variations et leur liens avec les autres modes de représentation comme objet d'étude et enfin, présenter les choix méthodologiques et théoriques que nous avons faits.

## II.1 Transposition didactique, approche anthropologique et problématique écologique

### II.1.1 Transposition didactique

Le concept de transposition didactique qui désigne globalement « le passage du savoir savant au savoir enseigné » a été introduit par Chevallard (1975) lors d'un cours donné à la première école d'été de didactique des mathématiques. Ce passage se décompose en deux étapes :

Savoir savant → **Savoir à enseigner** → **Savoir enseigné**

**Fig.1 : les trois étapes de la transposition didactique**

Dans la mesure où il est difficile d'avoir accès aux raisons des choix qui ont présidé au passage du savoir savant au savoir à enseigner, notre travail portera essentiellement sur le passage du savoir à enseigner au savoir enseigné[6]. Pour pouvoir étudier ce processus, il nous faut donc définir le savoir à enseigner et le savoir enseigné.

Toujours selon Chevallard, le savoir à enseigner est le résultat du « travail externe de transposition didactique » de la noosphère[7]. Lorsque la noosphère souhaite introduire des objets de savoir dans les contenus d'enseignement, elle sélectionne des « éléments du savoir savant » et les transforme afin de pouvoir, notamment, rédiger un programme officiel d'enseignement. Les « éléments du savoir savant » ainsi transformés deviennent des savoirs à enseigner.

Arsac (1989) fait remarquer que le savoir à enseigner ne se réduit pas au programme. Selon lui, en citant Chevallard :

[6] Ce qu'on appelle la transposition didactique interne selon Chevallard. Il s'agit de l'intérieur du système d'enseignement, bien après l'introduction officielle des éléments nouveaux dans le savoir enseigné. Par opposition, il appelle « la transposition externe » la sélection des éléments du savoir savant, par la noosphère, désignés comme savoir à enseigner.

[7] La noosphère est la « sphère où l'on pense le fonctionnement didactique » qui est constitué des « représentants du système d'enseignement » et des « représentants de la société ». (Chevallard, 1991)

> « Nous avons remarqué en effet qu'un texte de programme appelle une interprétation. Le savoir à enseigner est ce que l'enseignant pense qu'il a à enseigner quand les manuels publiés, les annales, les habitudes prises, ont fixé à peu près définitivement l'interprétation du programme. » (Arsac, 1989, p.12-13)

Arsac pointe là un élément laissé obscur par Chevallard qui parle pour sa part de « texte du savoir » sans plus de précision. Dans notre travail, nous nous rapprochons de la définition d'Arsac en considérant que le savoir à enseigner se constitue non seulement du programme scolaire mais également, comme le souligne Arsac, des interprétations courantes et des habitudes générales prises à propos de ce programme et/ou des anciens programmes (en position d'élève ou de professeur), ainsi que de « ce que l'enseignant pense qu'il a à enseigner », mais aussi de ses connaissances et enfin des manuels scolaires, outils importants pour la pratique.

### II.1.2 Approche anthropologique : rapports institutionnels – rapports personnels

Le cadre théorique que constitue l'approche anthropologique développé plus tard par Chevallard (1992) s'inscrit dans le prolongement de la théorie de la transposition didactique. Chevallard fonde sa théorie sur les notions d'objet et d'institution. Il considère que « tout est objet ». Le savoir mathématique, en particulier, en est un, qui nous intéresse justement dans la transposition didactique. Deux autres types d'objets sont essentiels dans cette théorie, les personnes (notées X) et les institutions (notées I).

Un objet O existe dès lors qu'une personne ou qu'une institution reconnaît cet objet comme existant pour elle, ou de façon plus précise s'il existe *un rapport personnel* de X à O (noté R(X,O)) ou *un rapport institutionnel* de I à O (noté R(I,O)). Ainsi, un objet n'existe que parce qu'il est connu d'une personne (ou d'une institution), il n'existe qu'en tant qu'objet de connaissance.

Du point de vue de l'approche anthropologique, nous considérons ainsi « la fonction et ses modes de représentation, plus particulièrement le tableau de valeurs et le tableau de variations » comme des objets de savoir. Nous considérons également « l'enseignement des mathématiques en classe de seconde en France » comme une institution. Cette approche nous permet donc d'identifier les rapports institutionnels à l'objet de savoir en question d'une part, et de caractériser les enjeux didactiques liés à ces objets de savoir d'autre part.

Pour identifier et caractériser les rapports institutionnels à un objet de savoir, Chevallard introduit le concept de praxéologie que nous développons ci-dessous.

### II.1.3 Praxéologique mathématiques ou organisation mathématique

Chevallard (1999) propose pour étudier les pratiques enseignantes relatives à un certain thème d'étude mathématique, de distinguer la réalité mathématique qui peut se construire dans une classe mathématique où l'on étudie ce thème, de la manière dont peut se construire l'étude de ce thème. La *réalité mathématique* n'est autre qu'une *praxéologie mathématique* ou organisation mathématique alors que la *manière de l'étudier* est une *praxéologie didactique*. Or, la praxéologie mathématique relative au thème d'étude de la fonction est justement l'objet de notre intérêt et c’est à travers l’étude de cette praxéologie que nous nous proposons de les étudier.

On parle de praxéologie mathématique, ou d’organisation mathématique, quand la praxéologie examinée sert de modèle à une activité mathématique. Une praxéologie mathématique se détermine par les types de tâches, les techniques, les technologies et les théories qui la constituent.

Ainsi, Chevallard (1999) introduit la notion de praxéologie, constituée du quadruplet formé de types de tâches T - présents dans une institution donné, des techniques $\tau$ - permettant de réaliser les tâches t de même type T, des technologies $\theta$ - discours justifiant la technique $\tau$, et des théories $\Theta$ - technologies de la technologie. En effet pour pouvoir exister dans une institution, une technique (et donc un type de tâches) doit apparaître comme compréhensible, lisible et justifié.

## II.2 Questionnement écologique

C’est dans ce cadre global que le questionnement écologique nous semble à propos. Nous nous baserons sur [Artaud, 1997] pour expliquer l’écologie des organisations mathématiques et didactiques.

D’abord, Artaud (1997) souligne que les premières études sur les processus transpositifs, et la théorie de la transposition didactique identifiaient déjà deux grands ensembles de conditions permettant aux mathématiques d’exister dans le système d’enseignement :

> « D’une part, les mathématiques enseignées doivent être compatibles avec leur environnement social, soit en particulier avec la sphère de production des mathématiques et l’institution des ″parents″. D’autre part, les mathématiques enseignées doivent pouvoir être présentées séquentiellement, les notions mathématiques se succédant selon un axe temporel linéaire, celui du temps didactique (chronogénèse), et définir deux rapports institutionnels, l’un en position de professeur, l’autre en position d’élève (topogénèse). » (Artaud, 1997, p.3)

De façon équivalente, le processus même de transposition didactique, soit de *transfert* du savoir d’une institution à une autre est intimement lié au point de vue écologique. En effet, le savoir mathématique dans l’institution de production des mathématiques (sphère savante), dans la noosphère (sphère où le savoir mathématique est manipulé à des fins de transposition), dans l’institution où il se trouve et dans la sphère scolaire (où le savoir est enseigné) est soumis à des conditions spécifiques dont le respect lui permet de se maintenir en vie. Et son transfert d’une institution à une autre impose sa manipulation et sa transformation (on parle alors de transposition), seules garantes de son maintien en vie dans l’institution où il est destiné.

Ensuite, la théorie de l’anthropologie didactique est également propice au questionnement écologique. En effet, la description de toute activité humaine, et donc de l’activité mathématique en particulier, à l’aide du modèle praxéologique s’inscrit très nettement dans une perspective écologique. Pour analyser un savoir mathématique dans une institution donnée selon cette théorie, il faut déterminer l’organisation mathématique, soit le système de tâches, techniques, technologies et, éventuellement, théories, qui le décrit. Or, une fois ce système déterminé, on se rend compte de l'existence de certains types de tâches et de l'absence d'autres. « *Pourquoi tel type de tâche existe-t-il et pas tel autre ?* » est assurément un questionnement d'ordre écologique.

Notre problème est de déterminer quelles sont les conditions qui ont amené à faire vivre et évoluer le tableau de valeurs et le tableau de variations dans l'écologie de l'enseignement du concept de la fonction en classe de seconde en France. Notre souci est donc d'examiner les possibilités d'existence et les manières d'exister de ces objets de savoir. Pour cela, nous allons déterminer les différents objets qui sont amenés à vivre dans l'enseignement du concept de fonction, ainsi que les organisations mathématiques dans lesquelles ils vont se trouver impliqués. Les objets d'enseignement liés au concept de fonction, les relations entre eux, la façon dont ils sont sollicités dans les organisations mathématiques sont en effet caractéristiques d'un environnement donné.

Nous nous posons donc les questions suivantes dans les termes de cette analyse :

- Quelles sont les conditions qui ont amené à faire vivre le tableau de valeurs et le tableau de variations dans l'étude du concept de fonction ? Quelles sont les manières d'exister de ces objets de savoir ?
- Quels sont les types de tâches mathématiques mettant en œuvre l'utilisation des tableaux de valeurs et de variations ?
- Comment ces objets prennent-ils leur place dans les pratiques des professeurs et dans les activités des élèves ?
- Pourquoi et comment certains types de tâches n'apparaissent pas ou peu dans les manuels et dans la pratique de la classe ?
- Comment ces objets donnent-ils du sens à la notion de fonctions ? Comment participent-ils à l'apprentissage ? Autrement dit, quel est le domaine de fonctionnement de ces objets ?

## II.3 Les aspects sémiotiques dans l'activité mathématique

Au-delà du questionnement en termes de praxéologie et d'écologie des savoirs, il apparaît que la fonction est un objet de savoir mathématique complexe, qui ne se laisse entrevoir que par différents types de représentation, dont les tableaux de valeurs et de variations participent. Afin de pouvoir préciser notre questionnement, il nous est donc apparu nécessaire de nous interroger sur les notions d'ostensifs et de registres de représentation sémiotiques et leur usage en didactique des mathématiques.

### II.3.1 Chevallard : ostensifs et sémiotique

Chevallard étudie ces notions dans le cadre global de l'approche anthropologique. Son souci étant toujours, quand il analyse l'activité mathématique, de la réinsérer dans l'ensemble des activités humaines. Il présente d'ailleurs très clairement sa théorisation du sémiotique comme étant le dernier niveau de développement de son approche anthropologique [Bosch, Chevallard, 1999].

Chevallard introduit les termes d'ostensifs et de non ostensifs, selon le point de vue sémiotique, pour analyser l'activité mathématique :

> « D'un côté, il y a les objets que je nomme *ostensifs*, tels un nom, une notation, un graphe, ou encore un schéma gestuel, qui peuvent être *réellement présents* et que l'on peut *effectivement manipuler* dans leur matérialité. D'un autre côté, il y a les objets *non ostensifs*, que je nomme aussi *émergents*, et que l'on peut effectivement *évoquer* à l'aide d'objets ostensifs. Lorsque le mathématicien dit qu'il manipule la fonction logarithme, c'est en vérité certains des objets ostensifs associés qu'il manipule. » (Chevallard, 1995-1996).

Bosch et Chevallard affirment que la *co-activation d'ostensifs* et de *non ostensifs* est toujours présente dans l'activité mathématique. Elle se retrouve à tous les niveaux d'activité (niveau technique mais aussi technologico-théorique). Il ne faudrait pas penser par conséquent que la manipulation d'ostensifs relève seulement du niveau technique alors que le recours à des objets non ostensifs tiendrait uniquement du niveau de la justification (technologico/théorique).

Par ailleurs, comme pour affirmer davantage l'importance à accorder aux ostensifs dans l'activité mathématique, Bosch et Chevallard distinguent, pour les objets ostensifs, une *valence instrumentale* et une *valence sémiotique*. C'est dans ce sens que les ostensifs doivent être considérés comme de véritables *instruments sémiotiques*, la valence instrumentale d'un instrument sémiotique permettant de *faire* et la valence sémiotique permettant de *voir ce qui est fait*. Les valences instrumentale et sémiotique de l'ostensif lui confèrent donc une double fonction, celle d'instrument et celle de signe.

Dans notre travail, nous utiliserons le terme d'ostensif pour désigner : un symbole, une écriture, une notation, un tracé ou une figure, reconnus par les deux institutions qui les manipulent (institution enseignante et institution enseignée), ou seulement (provisoirement) par l'une des deux, comme ostensif d'un concept mathématique, avec sa fonction sémiotique et sa fonction instrumentale. Il est clair que les ostensifs s'organisent en *registres* ; ce sont ces registres qui permettent de parler des objets mathématiques, de les traiter, de les mettre en relation avec d'autres.

La prise en compte de la valeur du sémiotique selon Chevallard dans l'étude des organisations praxéologiques impliquerait que soient repérés les ostensifs et les non ostensifs présents aux différents niveaux de ces organisations, que soit prise en compte la dialectique entre ces ostensifs et non ostensifs, et également, que l'accent soit mis sur les différentes valences des ostensifs utilisés. Il s'agit là d'une analyse très fine du travail sémiotique car se préoccupant spécifiquement du rôle du signe.

Ainsi, les registres dont parle Chevallard apparaissent comme des registres sensoriels : ce sont les différents aspects sensoriels qu'il faut coordonner pour produire une représentation ou pour l'interpréter. Cependant, dans l'étude que nous envisageons, nous nous plaçons à un niveau plus global qui ne nécessite pas d'analyser les modes sensoriels de production ou d'utilisation de la représentation.

En revanche, l'existence de plusieurs représentations pour un même objet est un point essentiel à considérer pour notre problématique. Nous pensons que la notion de registre de représentation sémiotique telle que Duval (1993) la définit serait plus adaptée à ce niveau de notre analyse dans la mesure où il lie la notion de registre à l'existence de règles de formation des représentations indépendamment des modes sensoriels de production. Il convient donc, à ce stade, de présenter les registres de représentation sémiotique selon Duval.

### II.3.2 Duval et le sémiotique

Duval s'intéresse au sémiotique dans l'activité mathématique et si son analyse s'inspire fortement de la théorie linguistique, sa motivation tient néanmoins de la psychologie cognitive. Dans ce cadre général, il cherche à caractériser le fonctionnement cognitif de la pensée humaine, en général, et celui de la pensée mathématique en particulier.

D'emblée, il souligne ce qu'il appelle *le paradoxe cognitif de la pensée mathématique*. Ce paradoxe tient au fait que les objets mathématiques ne sont pas directement accessibles par la perception, mais seulement à travers des représentants et que, seule la distinction entre un objet mathématique et sa représentation peut garantir son appréhension qui ne peut être que conceptuelle :

> « D'une part, l'appréhension des objets mathématiques ne peut être qu'une appréhension conceptuelle et, d'autre part, c'est seulement par le moyen de représentations sémiotiques qu'une activité sur des objets mathématiques est possible. » (Duval, 1993, p.38)

Ainsi, la distinction entre un objet mathématique (conceptuel) et sa représentation devient un des points stratégiques pour la compréhension des mathématiques, car « toute confusion entraîne, à plus ou moins long terme, une perte de compréhension et les connaissances acquises deviennent vite inutilisables hors de leur contexte d'apprentissage (…) » (ibid., p.37)

Duval (1993) introduit les termes de sémiosis et de noésis pour désigner respectivement l'appréhension, ou la production, d'une représentation sémiotique et l'appréhension conceptuelle d'un objet, et il affirme que « la noésis est inséparable de la sémiosis ». Il en ressort que tout enseignement mathématique doit être organisé de façon à prendre en compte cette forte liaison entre sémiosis et noésis, et en particulier, ne doit pas négliger la sémiosis, en tant qu'opération cognitive, par rapport à la noésis.

Pour qu'un système de représentation puisse être considéré comme un registre de représentation, il doit permettre, toujours selon Duval, les trois activités cognitives fondamentales liées à la sémiosis :

- La **formation** d'une représentation identifiable comme une représentation dans un registre donné.
- Le **traitement** d'une représentation, c'est-à-dire sa transformation dans le registre même où elle a été formée.
- La **conversion** d'une représentation, c'est-à-dire la transformation de cette représentation en une représentation d'un autre registre en conservant la totalité ou une partie seulement du contenu de la représentation.

Duval souligne que de ces trois activités, si celle de formation est correctement prise en compte dans l'enseignement, celle de traitement ne l'est pas toujours alors qu'aucune place véritable n'est accordée à celle de conversion. Or, souligne-t-il le problème de la conversion des représentations, largement méconnu par l'enseignement, mérite une attention toute particulière.

Ainsi, pour qu'une connaissance ou un savoir mathématique puisse être mis en œuvre, il est alors nécessaire, toujours selon Duval (1996) :

- que le sujet dispose, non pas d'un mais de plusieurs registres de représentation (on ne peut en effet différencier un objet de sa représentation que si on dispose d'au moins une autre représentation, dans un autre registre) ;
- qu'il ait acquis la coordination de ces registres, faute de quoi on observe les effets du cloisonnement entre les différents registres.

D'autre part, pour favoriser un apprentissage prenant en compte le lien étroit qui existe entre la noésis et la sémiosis, Duval (1993) propose de placer les élèves dans des conditions qui permettent cette prise de conscience plus globale, et pour cela, de leur proposer des tâches spécifiques. Il propose ainsi trois types de tâches :

- *Des tâches de variations comparatives relatives à la signifiance des représentations :*

Cette tâche concerne l'appréhension des représentations sémiotiques. Naturellement, en faisant varier systématiquement une représentation, on en change le contenu représenté : le choix, parmi plusieurs représentations possibles dans le registre d'arrivée, de celle qui correspond à la représentation modifiée dans le registre de départ permet ainsi d'identifier les variations des unités signifiantes dans chaque registre de représentation.

- *Des tâches de couplage et de découplage entre des traitements non-sémiotiques et des traitements sémiotiques :*

Cette tâche concerne l'apprentissage des traitements propres à une certaine catégorie de registres. Duval précise que l'enseignement des mathématiques fait une grande place à l'apprentissage des traitements seulement dans le cas où les traitements sont de type calcul, mais non pour ceux où les traitements ne sont pas de type calcul.

- *Des tâches de double production pour les représentations sémiotiques complexes :*

Cette tâche concerne le mode de production des représentations complexes. Duval appelle représentation complexe toute représentation qui « expose une démarche », comme un calcul comprenant plusieurs étapes. Il est essentiel, selon toujours Duval, lorsque ces productions sont faites dans un registre où l'organisation sémiotique est linéaire, de demander préalablement une production dans un registre où l'organisation sémantique n'est pas linéaire (graphe, schéma,…) et demander ensuite la production dans le registre à organisation sémantique linéaire comme une description de la première production. Cette double production s'est révélée décisive pour l'apprentissage du raisonnement déductif.

La notion de registre introduite par Duval dans la didactique des mathématiques a des liens avec une notion plus ancienne dans le champ, celle de cadre introduite par Douady (1986). Avant de revenir à la notion de registre, nous allons brièvement présenter cette notion.

### II.3.3 Notion de cadre et statut outil / objet des concepts mathématiques

L'introduction en didactique des mathématiques de ces notions est due à Douady (1986) qui s'interroge sur l'activité du mathématicien dans un souci didactique. De son analyse épistémologique, il ressort que « *une part importante de l'activité du mathématicien consiste à poser des questions et à résoudre des problèmes* » et, de cette activité, elle retient deux points en particulier :

- Le double statut de tout concept mathématique (statut outil / objet) :

Le mathématicien résout les problèmes à l'aide d'outils mathématiques. Ces outils sont généralement implicites au départ, c'est-à-dire qu'ils correspondent à une procédure qui se justifie par un concept en cours d'élaboration, ils deviennent ensuite explicites. Ils correspondent alors à la mise en œuvre intentionnelle d'un concept pour résoudre le problème. Peu à peu, et pour les besoins de la transmission à la communauté scientifique, les outils mathématiques ainsi créés sont décontextualisés, formulés de la façon la plus générale possible. Le concept acquiert alors le statut d'objet et va pouvoir s'intégrer au corps des connaissances déjà constituées. Le terme objet se réfère à « *l'objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir savant à un moment donné, reconnu socialement.* » (Douady, 1986, p.9)

- Le fonctionnement global d'un concept mathématique se fait à l'intérieur d'un (ou de plusieurs) cadre(s) mathématique(s).

Le cadre est « *constitué des objets d'une branche mathématique, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations.* » (ibid., p.11)

Un même concept mathématique est amené à fonctionner dans différents cadres. Chacun de ces cadres détermine un environnement conceptuel et technique spécifique qui y caractérise le fonctionnement du concept. Le mathématicien, dans son activité de résolution de problèmes, a recours à *des changements de cadres*. Il effectue un changement de cadres pour un problème donné, à chaque fois qu'il le transporte d'un cadre à un autre. La traduction du problème d'un cadre dans un autre permet de le poser autrement :

> « Le changement de cadres est un moyen d'obtenir des formulations différentes d'un problème qui, sans être nécessairement équivalentes, permettent un nouvel accès aux difficultés rencontrées et la mise en œuvre d'outils et de technique qui ne s'imposaient pas dans la première formulation. […] Quoi qu'il en soit, les traductions d'un cadre dans un autre aboutissent souvent à des résultats non connus, à des techniques nouvelles, à la création d'objets mathématiques nouveaux, en somme à l'enrichissement du cadre origine et des cadres auxiliaires de travail. » (ibid., p.11).

Nous retiendrons principalement de cette théorie la notion de cadre, qu'il apparaît important de coordonner ave celle de registre de représentation sémiotique au sens de Duval. Par rapport à la notion de registre qui concerne plus particulièrement la façon de travailler les différentes représentations symboliques associées à un concept, celle de cadre concerne globalement le fonctionnement d'un concept dans ses relations avec d'autres concepts du même cadre ou de cadres différents.

Nous pensons que l'analyse en termes de cadres nous permettra de pointer les interactions entre des domaines mathématiques différents qui sont pris en compte dans l'enseignement, notamment dans les problèmes proposés aux élèves. La notion de registre, le plus souvent relativisée à un cadre, nous permettra d'analyser les différentes représentations des objets mathématiques concernés et de voir comment le passage de l'une à l'autre (conversion) est pris en compte dans l'enseignement. Un même registre sémiotique peut cependant intervenir dans des cadres différents, comme le dit Duval :

> « Un registre se détermine par rapport à un système sémiotique permettant de remplir les trois fonctions cognitives fondamentales. Un cadre se détermine par rapport à des objets théoriques, en l'occurrence des objets mathématiques. Il peut y avoir changement de cadre sans changement de registre et changement de registre sans changement de cadre, car un cadre peut exiger la mobilisation de plusieurs registres. » (Duval, 1996, p.357)

Mais nous serons également attentif au statut outil ou objet selon lequel les notions mathématiques sont impliquées dans un enseignement donné dans la mesure où cela nous apparaît constituer un indicatif des méthodes pédagogiques adoptées. Ainsi, un enseignement où les nouvelles notions sont souvent introduites selon leur statut outil est significatif d'un enseignement qui se soucie de la construction du sens des notions mathématiques chez les élèves, alors qu'un enseignement qui insiste davantage sur le statut objet de ces notions est un enseignement plus classique qui ne prend pas à sa charge la construction du sens chez les élèves.

Dans notre travail, nous envisageons d'utiliser plusieurs registres en interaction les uns avec les autres et nous prévoyons des tâches relatives à la coordination entre registres. C'est ce que nous allons étudier à présent.

## II.4 Problématique du changement de registres

Nous pensons à la suite de Duval que le passage d'un registre de représentation sémiotique à un autre présente un caractère crucial non seulement pour la compréhension du concept concerné par les différents représentations, mais aussi pour la maîtrise du fonctionnement de chacun des registres : Il semble tout à fait possible que des connaissances locales puissent s'élaborer dans des registres différents. Ces connaissances peuvent se trouver coordonnées plus tard lors d'une reprise ou d'un approfondissement du concept. Par ailleurs, comme le précise Bosch et Chevallard (1999), les technologies relatives aux changements de représentants sont partie intégrante de l'organisation mathématique étudiée, et non des moyens externes de contrôle des ostensifs.

Quoiqu'il en soit, il nous semble important d'étudier ces connaissances et de voir si certains traitements dans un registre, ou certaines conversions entre registres, peuvent être introduits pendant l'enseignement pour favoriser la compréhension du concept de fonction.

***Traitement et conversion***

On peut penser que des connaissances sont construites dans un registre lors d'un apprentissage ; ces connaissances seront alors spécifiques à l'outil ou au registre utilisé à cette occasion. Par contre, dans une tâche relative au passage d'un registre à un autre, des connaissances spécifiques à la transformation peuvent se trouver mobilisées, ou construites. Il s'ensuit que certaines connaissances doivent être spécifiques des outils, tandis que certaines connaissances sont spécifiques des transformations entre représentants. Ces connaissances sont mises en œuvre à l'occasion de certaines tâches qu'il sera nécessaire de spécifier.

Afin d'analyser les connaissances et savoirs en jeu dans ces transformations de registres, nous distinguons, comme précisé ci-dessus et suivant toujours Duval, deux types de transformations entre représentants d'une même fonction :

- **Traitement** (les transformations à l'intérieur d'un registre) ;
- **Conversion** (les transformations entre deux registres différents).

### II.4.1 Travaux existant sur l'activité de traitement et de conversion

De nombreux travaux se sont inspirés de ces perspectives développées par Duval. Certains, se sont intéressés à l'activité de *traitement* en tant qu'activité négligée par l'enseignement dans les registres où les traitements ne sont pas uniquement de type calcul. Duval cite d'ailleurs deux thèses celle de Padilla Sanchez et de Lémonidis et insiste tout particulièrement sur la deuxième (Duval, 1993). Celles-ci se sont intéressées au registre des figures géométriques en remarquant que, malgré le rôle heuristique évident des figures en géométrie, l'enseignement des mathématiques néglige l'apprentissage des traitements propres à ce registre. Chacune de ces deux études se centre sur une opération particulière de ce registre des figures pour l'enseignement d'un domaine spécifique de géométrie, et s'interroge sur les possibilités de traitement figuratif de l'opération géométrique considérée.

D'autres travaux se sont plutôt intéressés à l'activité de *conversion* entre registres. Notons justement le travail de Gutzman-Retamal (1989) : Toujours inscrit dans la perspective de Duval et bien qu'il se centre sur l'activité de conversion, ce travail a retenu notre attention pour plusieurs raisons.

D'abord, parce qu'elle s'intéresse également au concept mathématique de fonction. Sa recherche ne concerne, cependant, que les débuts de l'enseignement de la fonction puisqu'elle étudie une classe de troisième. Il n'est pas question à ce niveau d'introduire la notion générale de fonction numérique mais d'appréhender quelques types particuliers de fonctions, en particulier les fonctions linéaires et affines.

Ensuite, parce qu'elle y fait un état des lieux de l'organisation de l'enseignement de la fonction en classe de 3ème par rapport aux différentes représentations qui sont possibles. Gutzman-Retamal a dans un premier temps cherché à distinguer puis à présenter les principaux registres de représentation utilisés pour représenter le concept de fonction en classe de 3ème française. Elle retient :

- le registre algébrique,

- le registre graphique,
- le registre de programmation,
- le registre des tableaux.

Le langage naturel, quoique pouvant également constituer un registre, n'est pas considéré dans son étude sur le même plan que ceux retenus et ci-dessus cités. En raison de « sa nature très complexe et trop large », elle retient essentiellement son rôle de communication et donc de liaison entre les différents registres possibles.

Gutzman-Retamal conjecture qu'une meilleure prise en compte des aspects sémiotiques dans l'enseignement, et en particulier des activités de passage d'un registre à un autre, ne peut qu'aboutir à de meilleures performances des élèves. C'est dans ce but qu'elle compare, à travers un questionnaire prenant un compte les objectifs les plus classiques dans les études de fonctions, des élèves ayant suivi un enseignement traditionnel sur les fonctions, et des élèves ayant suivi un enseignement expérimental, selon la *démarche logo*, fortement axé sur le registre de programmation dans le traitement des fonctions et des équations de droite.

Le questionnaire se limite aux seules fonctions qui sont au programme, linéaires, affines ou affines par morceaux et teste « la reconnaissance de fonctions à partir de situations particulières », « la manipulation de la fonction » essentiellement à travers des changements de registres et enfin, « l'application de la fonction aux équations de droites et aux propriétés de proportionnalité » en tant que principaux objectifs d'enseignement à ce niveau scolaire.

### II.4.2 Congruence des représentations

Duval a noté d'autre part que les changements de représentants sont d'autant plus faciles que les représentations sont congruentes[8], c'est-à-dire que l'une est la traduction de l'autre, ceci pouvant se produire dans le même registre ou dans des registres différents. Ainsi les formulations :

A : « l'ensemble des points dont l'ordonnée est supérieure à l'abscisse » et A' : « $y > x$ » sont congruentes, l'une dans le registre de la langue naturelle, l'autre dans le registre algébrique ; alors que, B : « l'ensemble des points dont l'abscisse et l'ordonnée ont le même signe » et B' : « $xy > 0$ » ne le sont pas.

Ainsi, une conversion entre deux registres n'est triviale que dans le cas de congruence entre le registre de départ et le registre d'arrivée, par suite, plus le degré de non congruence est élevé et plus la conversion devient complexe. Duval (1996) remarque d'autre part que, dans une tâche de conversion, la non-congruence peut être très forte dans un sens (du registre A vers B)

[8] Les trois critères de congruence, selon Duval, sont :
- la possibilité d'une correspondance « sémantique » des éléments signifiants : à chaque unité signifiante simple de l'une des représentations, on peut associer une unité signifiante élémentaire.
- l'univocité « sémantique » terminale : à chaque unité signifiante élémentaire de la représentation de départ, il ne correspond qu'une seule unité signifiante élémentaire dans le registre de la représentation d'arrivée.
- l'organisation des unités signifiantes : les organisations respectives des unités signifiantes des deux représentations comparées conduit à y appréhender les unités en correspondance dans l'ordre dans l'arrangement des unités qui composent chacune des deux représentations n'est pertinent que lorsque celles-ci présentent le même nombre de dimension.

et très faible dans l'autre sens (de B vers A).

Dans l’analyse de Bosch et Chevallard (1999), la non-congruence traduit en fait quelque chose qui est susceptible de nous intéresser, du point de vue de l’analyse des connaissances en jeu dans un travail : l’existence d’une organisation mathématique restée souvent implicite, ou manquante, et qui est le savoir (ou la connaissance) permettant de passer d’un représentant à l’autre; ce savoir se traduit par une chaîne d’ostensifs, qui rend compte de la transformation des représentations. S’il y a donc des représentants pour lesquels le passage peut se faire de façon très économique, du point de vue de l’organisation mathématique et des ostensifs mobilisés, il y a des représentants entre lesquels ce passage est dépendant d’une chaîne plus importante d’ostensifs. Si cette chaîne n’est pas prise en charge dans l’enseignement, la transformation apparaîtra comme relativement opaque ; l’élève aura seul à reconstituer la chaîne manquante, ce qu’il fera plus ou moins aisément. Or, l’enseignant risque de ne pas percevoir le travail en jeu dans cette transformation. Ce travail ne pourra donc s’exprimer que sous forme de connaissances privées, et ne recevra pas le statut de savoir. C’est ce qui se produit dans l’exemple donné par Duval : traduction vectorielle d’une disposition de points sur une droite (Duval, 1996, p.366).

### II.4.3 Changement de représentant et connaissances

Cette interprétation de la non-congruence (manque de visibilité d’une organisation mathématique permettant la transformation) nous alerte sur le fait que les activités de changement de représentant ne sont pas *déterminées* par les codages des représentants : codage de départ, codage d’arrivée. En ce sens elles engagent l'activité du sujet d'une façon qui n'est pas algorithmique.

Donnons un exemple : on peut donner une règle permettant de placer les points donnés par un tableau de valeurs dans un repère, mais cette règle ne suffira pas pour tracer la représentation graphique d'une fonction affine ou du second degré : le sujet qui trace la représentation graphique devra se servir des caractéristiques connues de la fonction (coefficient directeur si c'est une droite, allure de la parabole, sommet de celle-ci si c'est une fonction du second degré) pour tracer celle-ci.

Il s'ensuit que les transformations dans un même registre, ou entre registres, ne se laissent pas analyser comme des codages/décodages, de façon algorithmique ; c’est encore une raison de considérer les changements de représentant en termes de connaissances du sujet qui effectue la transformation ; et ces connaissances proviennent du concept mathématique sur lequel porte le travail. Il est raisonnable de penser que si les représentants sont de natures très hétérogènes, c'est le sens du concept qui doit guider la transformation.

De façon réciproque, on peut supposer alors que les transformations puissent jouer un rôle dans la compréhension d’un concept, puisqu'elles obligent à contrôler le sens par des connaissances liés non seulement au représentant, mais bien au concept. C'est d'ailleurs ce que soutient Duval, qui affirme même que la compréhension convenable d'un concept ne peut se faire sans la coordination des registres de représentation (Duval, 1994).

Nous faisons l’hypothèse que le contrat actuel de l'enseignement secondaire ne met que peu en interaction les différents registres de représentation. Afin de mobiliser des connaissances dans un travail sur les fonctions, il est donc souhaitable de prévoir des tâches de conversions entre registres distincts. C'est pourquoi nous nous centrerons, dans notre travail, sur l'activité de conversion. Nous envisageons en effet de réaliser des ingénieries didactiques visant à faire travailler ces conversions.

On peut alors se poser plusieurs questions :

- Quel est le statut, dans la classe, des tâches de traitement et de conversion ? Sont-elles initiées par le professeur, ou produites spontanément par les élèves à propos de ces outils?
- Quelles procédures sont mises en jeu par les élèves pour résoudre les exercices qui relèvent de types de tâches liés ces nouveaux outils?
- Quelles sont les connaissances en jeu dans les tâches de traitements et de conversions ? sont-elles spécifiques des registres, des transformations, du concept ?
- Et quelles sont les situations pour lesquelles ces connaissances sont opératoires ?

Nous nous proposons donc d'étudier ces représentations. Il s'agit de préciser quelle est leur utilité, quel travail peut être fait grâce à elles ; mais aussi lesquelles sont viables dans l'écologie actuelle de l'enseignement secondaire.

Dans la suite de ce travail, nous considérerons que les tableaux de valeurs d'une part et les tableaux de variations d'autre part déterminent deux sous-registres d'un registre plus grand comprenant tous les types de tableaux. En effet, les deux types de tableau partagent en communes certaines règles de codage (ligne de la variable, ligne de l'ordonnée), toutefois, le tableau de variations comprend des règles de codages plus complexes avec l'usage des flèches. Au-delà de ces différences purement formelles, les deux types de tableaux ne renferme que des informations partielles sur la fonction. A priori, le tableau de variations contient des informations plus nombreuses, mais il obéit aussi à des règles plus strictes. Nous détaillons ces questions ci-dessous.

## II.5 Connaissances liés à l'utilisation des registres et à leurs conversions

### II.5.1 Le tableau de valeurs

***Les principales caractéristiques***

Un tableau de valeurs pour une fonction donne un « échantillon » des couples formés par une valeur de la variable x et la valeur de son image f(x). C'est donc une représentation partielle de la correspondance entre la variable et son image, il donne donc une vision finie pour quelque chose d'infini. Le tableau de valeurs n'a aucune raison a priori de contenir des valeurs remarquables de la fonction au regard de ses variations.

***Construction et variables didactiques***

Plusieurs éléments interviennent dans la constitution d'un tableau de valeurs, que nous identifierons comme des variables didactiques.

- $V_{nomb}$ : nombre de valeurs de la variable (nombres de colonnes).
- $V_{min/max}$ : Valeurs maximale et minimale de x dans le tableau
- $V_{nature}$ : nature des valeurs de la variable choisies : entiers, demi-entiers, nombres décimaux d'un, deux, trois, … chiffres après la virgule, fractions, nombres irrationnels.
- $V_{pas}$ : les valeurs de la variable peuvent être espacées d'un pas régulier ou non, ce pas peut prendre différentes valeurs.
- $V_{ordre}$ : les valeurs de la variable peuvent être ou non ordonnées selon l'ordre croissant ou décroissant.
- $V_{sym}$ : les valeurs de la variable peuvent être symétriques par rapport à l'origine, dans ce cas en général l'intervalle de définition de la fonction est lui-même symétrique. D'autres symétries que par rapport à l'origine peuvent être relevées.
- $V_{vert/horiz}$ : présentation du tableau ; horizontale/verticale. La norme dans l'enseignement français est de disposer le tableau de valeurs horizontalement, mais, de plus en plus, sous l'influence des calculatrices dans lesquelles ce tableau est le plus souvent représenté verticalement, certains manuels adoptent une présentation verticale.

Ainsi on pourra caractériser la « forme » d'un tableau de valeurs par la donnée d'un heptuplet.

*Par exemple* :

Pour une fonction définie sur [-2 ; 7] on donne le tableau suivant :

| ***x*** | -2 | -0,5 | 1 | 2 | $\pi$ | 5 | 17/3 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***f(x)*** | -3,2 | 0,23 | 2 | 0 | 5/4 | -1 | 2 | $\sqrt{2}$ |

On pourra le caractériser par le heptuplet suivant :

(8 valeurs ; min (-2) max (7) ; 5entiers-1demi-entier-1fraction-1irrationnel ; pas de pas régulier ; ordre croissant ; pas de symétrie ; présentation horizontale)

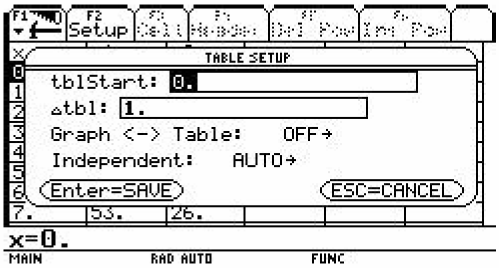
***Tableau de valeurs d'une fonction sur la calculatrice***

Dans toutes les calculatrices graphiques, il est possible de tracer des tableaux de valeurs d'une fonction définie par une expression algébrique. En général, on a le choix entre donner les valeurs de x une à une ou de déterminer la première valeur et un pas.

Voici par exemple ce que l'on peut faire avec une TI89 :

La touche Table permet de visualiser un tableau de valeurs. Avec les réglages par défaut, il est possible d'afficher six colonnes : la première contient les valeurs de x, les suivantes les valeurs des images par les fonctions que l'on a définies dans Y= ….(image)

La boîte de dialogue Tblset (Table setup) permet de régler les paramètres du tableau. Le tableau de valeurs dépend des paramètres suivants :




- tblStart désigne la valeur initiale de la variable.
- Dtbl permet de régler l'écart entre deux valeurs consécutives de la variable (le pas).
- Graph < - > Table permet de choisir si le lien est fait entre les valeurs affichées dans la table et celles utilisées pour construire la courbe. Si on choisit OFF, il n'y a aucun lien. Si on choisit ON, on obtient les coordonnées des points utilisés pour la construction de la courbe (les valeurs x vont alors dépendre du choix de $x_{min}$ et $x_{max}$).
- Indépendent permet de choisir si on souhaite que la construction du tableau de valeurs soit automatique ou effectuée manuellement par saisie des valeurs de la variable.

Il est à noter que dans les tableaux de valeurs, les valeurs des variables et de leurs images sont toujours données de façon approchée.

Deux inconvénients :

- La représentation des nombres que fournit la machine : généralement, il s'agit d'approximations décimales comportant un nombre fixe de chiffres significatifs.
- la représentation par la machine du plan euclidien : le plan est représenté par un écran juxtaposition de pixels, un pixel correspond à une infinité de points du plan, la représentation graphique est alors effectuée de manière discrète et non de manière continue.

***Contrat didactique sur la nature des tableaux de valeurs***

Comme nous venons de le voir, il existe donc potentiellement une assez grande variabilité dans la nature des tableaux de valeurs. Néanmoins, on peut d'ores et déjà dire a priori que certaines de variables que nous venons de dégager ne prendront en fait qu'un nombre restreint de valeurs. En effet, $V_{nomb}$ sera vraisemblablement comprise entre 5 (moins cela ne vaut pas la peine) et 15 (au delà cela fait beaucoup). $V_{min/max}$ correspond la plupart du temps aux bornes de l'intervalle de définition quand elles sont finies. Très souvent, les valeurs sont ordonnées dans l'ordre croissant et espacées d'un pas régulier qui est un entier (quelquefois 0,5 ou 0,1) ce qui fait que la plupart des valeurs sont des entiers (voire des demi-entiers ou des nombres décimaux « simples »).

Par ailleurs, très souvent les valeurs du tableau sont choisies pour donner une bonne représentativité de l'intervalle de définition indépendamment de la nature de la fonction, c'est le cas typique où on commence par la borne inférieure de l'intervalle avec un pas constant pour arriver à la borne supérieure en une petite dizaine de valeurs. C'est bien aussi l'idée que l'on se fait de la mesure d'un phénomène naturel : taille d'une population tous les ans entre deux dates, prise de la température toutes les 5 min, etc. Ces premiers constats devront bien entendu être affinés par une analyse plus détaillée de l'usage des tableaux de valeurs dans les manuels.

***Connaissances liées au tableau de valeurs***

Comme nous l'avons dit plus haut, un tableau de valeurs ne donne qu'une information partielle sur une fonction. De plus, il est lié à des choix qui ont un grand arbitraire. Le tableau de valeurs est avant tout un outil pour travailler les notions d'images et d'antécédents et pour tracer des courbes. Son usage peut paraître simple et donc les règles de son utilisation restent implicites dans l'enseignement.

De plus, il semble que les connaissances liées à son usage ne sont pas mises en avant dans les pratiques. Par exemple, se pose t-on la question de savoir dans quelle mesure, un tableau d'une dizaine de valeurs peut rendre compte de façon pertinente d'une fonction définie sur tout IR ? Cela dépend bien sûr si on sait ou non par ailleurs que la fonction est par exemple affine, ou du second degré, etc. Ou bien nous verrons que la tâche « tracer plusieurs courbes à partir d'un tableau de valeurs » est peu présente dans les manuels.

De même, les élèves ont-ils l'occasion de discuter sur la variabilité dans le choix d'un tableau de valeurs pour une fonction donnée, sur ce qui peut se passer entre les valeurs du tableau ? A quelle condition deux tableaux peuvent-ils représenter la même fonction ?

Il semble que les connaissances sur les tableaux de valeurs restent transparentes et ne fassent pas l'objet d'un enseignement explicite. Or l'élève va construire des connaissances en actes. Le professeur peut peut-être avoir une vision péjorée de cet outil, mais celui-ci peut participer de la conceptualisation de la notion de fonction dans le travail de l'élève. Ceci est d'autant plus vrai nous semble-t-il, dans l'enseignement actuel, d'une part de par les choix de programmes et d'autre part, de part l'utilisation répandu des calculatrices graphiques.

Afin de mieux expliciter ces connaissances et leur importance, nous allons regarder les interactions possibles entre les tableaux de valeurs et les différents modes de représentation de la fonction.

***Tâches relatives aux conversions liées au tableau de valeurs***

Nous retiendrons trois grands registres : le registre algébrique, le registre graphique et le registre tableau de variations. Il existe donc a priori six types de conversion.

| *Registre* | *Sens* | *Conversion* |
|---|---|---|
| Tableau de valeurs (Tvl) ↔ Algébrique (A) | **Tvl → A** | • Trouver l'expression algébrique d'une fonction dont on connaît un tableau de valeurs |
| | **A → Tvl** | • A partir d'une expression algébrique, établir un tableau de valeurs. |
| Tableau de valeurs (Tvl) ↔ Graphique (G) | **Tvl → G** | • Tracer une courbe à partir d'un tableau de valeurs |
| | **G → Tvl** | • A partir d'une courbe, établir un tableau de valeurs. |
| Tableau de valeurs (Tvl) ↔ Tableau de variations (Tvr) | **Tvl → Tvr** | • A partir d'un tableau de valeurs, établir un tableau de variations |
| | **Tvr → Tvl** | • A partir d'un tableau de variations, établir un tableau de valeurs |

**Tableau 1 : Tâches relatives aux conversions liées au tableau de valeurs**

Ces six types de conversions ont des rôles bien spécifiques en termes de connaissances sur les fonctions. Certaines font l'objet d'un enseignement explicite voire même intensif, d'autres restent implicites voire n'existent pas dans l'enseignement. Il nous appartiendra dans les analyses praxéologiques qui vont suivre de faire un état des lieux sur ces questions ainsi que de tenter de savoir pourquoi certaines conversions existent et d'autres pas et d'analyser leurs importances relatives dans le processus d'apprentissage de la notion de fonction.

***Connaissances antérieures des élèves***

En classe de Troisième, les élèves entendent parler de fonctions à l'occasion de l'étude des fonctions affines et linéaires. Ce sont les seuls types de fonctions qu'ils connaissent mais le vocabulaire et les premiers exercices sur la notion de fonction ont été travaillés à leur propos. En particulier, les élèves ont dû tracer des tableaux de valeurs des fonctions linéaires ou affines. Ils ont aussi appris que deux valeurs suffisent pour trouver l'expression algébrique d'une fonction affine. Ces connaissances sont à prendre en compte dans notre étude au niveau seconde.

## II.5.2 Le tableau de variations

***Les principales caractéristiques***

Un tableau de variations est une sténographie de la langue naturelle, c'est-à-dire qu'il comporte des informations, codifiée dans un style compact, qui se décode par une lecture visuelle. Il permet la lecture d'images, d'antécédents; des variations et des extrema de la fonction ainsi que des valeurs éventuelles de x pour lesquelles elle n'est pas définie.

Le tableau de variations n'est pas une représentation arbitraire n'engageant que peu de connaissances sur la fonction, comme l'est le tableau de valeurs. En effet, le tableau de variations est une représentation conventionnelle des variations de la fonction. Sa constitution obéit à des règles précises de construction sémantique. En fait, le tableau de variations, grâce à une organisation des données dans un tableau usant de signes de façon spécifique, permet de résumer un ensemble d'informations qui seraient longues et fastidieuses à donner en langue naturelle. Il permet ainsi de disposer à tout moment de l'ensemble des informations sur les variations de la fonction dans un mode de représentation compact et rapidement appréhendable. De fait, l'utilisation du tableau de variations engage nettement plus de connaissances que le tableau de valeurs, non seulement parce qu'il nécessite de savoir déterminer les variations de la fonction mais aussi parce qu'il nécessite des aptitudes plus spécifiques de codage et donc de décodage. Par ailleurs, le tableau de variations prend explicitement en compte l'aspect continu de la variable x, puisqu'il résume les variations et ne se contente pas d'un échantillonnage discret comme le tableau de valeurs.

Néanmoins plusieurs fonctions peuvent correspondre à un même tableau de variations avec les mêmes restrictions que celles que nous avons faites pour le tableau de valeurs. Par contre, à une fonction ne correspond qu'un seul tableau de variations (modulo de très légères différences superficielles éventuelles dans les règles de représentation). C'est une différence essentielle avec le tableau de valeurs.

***Connaissances liées à sa construction***

Contrairement au tableau de valeurs, les élèves rencontrent pour la première fois le tableau de variations en classe de seconde. La technique de construction d'un tel tableau n'est pas explicitement décrite dans des ouvrages théoriques mais il y a un consensus chez les mathématiciens sur sa construction. Ainsi, on peut la décrire de la façon suivante :

- écrire x dans la case de gauche de la première ligne, et f(x) en dessous ;
- les nombres figurant dans la première ligne, et qui correspondent aux valeurs de x, correspondent aux intervalles où la fonction change de sens de variations,
- les nombres placés sous les valeurs de la première ligne, correspondent aux images de ces valeurs, donc aux valeurs correspondantes de f(x) ;
- on trace une flèche ascendante (respectivement descendante) de la gauche vers la droite si la fonction est croissante (respectivement décroissante) sur un intervalle ;
- les nombres de la ligne correspondant à f(x) sont placés soit, au départ d'une flèche ; soit à l'arrivée d'une flèche (ou parfois, sur le trajet d'une flèche). Ils sont toujours en correspondance d'un nombre placé sur la première ligne ;
- dans le cas où la fonction n'est pas définie pour une valeur de x, on place à l'aplomb de cette valeur une double barre verticale dans la ligne de f(x).

Cette description montre bien que le tableau de variations est une représentation très codée et que celle-ci nécessite des connaissances sur ce code : notamment, les flèches ne signifient pas que la courbe est une droite, ce sont des symboles indiquant le sens de variations (ceci constitue une erreur classique chez les élèves). Notons de plus que la « figure » que dessinent les flèches de la deuxième ligne du tableau est visuellement proche de la représentation graphique de la fonction mais qu'elle n'est pas la courbe.

La longue liste que nous venons d'expliciter sur les connaissances en jeu dans un tableau de variations fait bien apparaître la complexité de l'entreprise, et prouve que la réussite de l'interprétation du tableau de variations est tributaire de nombreuses connaissances du sujet : C'est un ostensif très formalisé et très complexe.

En conclusion, nous faisons l'hypothèse que cette complexité est largement sous-estimée dans l'enseignement, et de ce fait la majeure partie de la compréhension du symbolisme du tableau de variations est à la charge des élèves ; ce qui veut dire que le professeur n'a que peu de moyens d'accès au fonctionnement de ce qui est, pour l'élève, un bloc de connaissances *privées*.

***Tâches relatives aux conversions liées au tableau de variations***

Comme pour le tableau de valeurs, nous retiendrons trois grands registres : le registre algébrique, le registre graphique et le registre tableau de valeurs. Il existe donc a priori six types de conversion.

| *Registre* | *Sens* | *Conversion* |
|---|---|---|
| Tableau de variations (Tvr) $\leftrightarrow$ Algébrique (A) | **Tvr $\rightarrow$ A** | • Trouver, par une méthode convenable, l'expression algébrique d'une fonction dont on connaît un certain nombre de valeurs, le sens de variation et éventuellement la nature (affine ou second degré par exemple) |
| | **A $\rightarrow$ Tvr** | • à partir d'une formule, établir le tableau de variations |
| Tableau de variations (Tvr) $\leftrightarrow$ Graphique (G) | **Tvr $\rightarrow$ G** | • tracer une courbe à partir d'un tableau de variations |
| | **G $\rightarrow$ Tvr** | • à partir de la courbe, reconstituer le tableau de variations |
| Tableau de variations (Tvr) $\leftrightarrow$ Tableau de valeurs (Tvl) | **Tvr $\rightarrow$ Tvl** | • à partir d'un tableau de variations, établir un tableau de valeurs |
| | **Tvl $\rightarrow$ Tvr** | • à partir d'un tableau de valeurs, établir un tableau de variations |

**Tableau 2 : Tâches relatives aux conversions liées au tableau de variations**

## Organisation de la thèse

Pour approfondir et donner les premières réponses aux questions que nous venons de poser, nous avons divisé notre étude en deux grandes parties :

Partie B - « Etude des contraintes et libertés institutionnelles – une approche en terme de rapport institutionnel ».

Partie C - « Expérimentation visant à tester la viabilité certains points phares des programmes 2000. ».

### PARTIE B : Etude des contraintes et libertés institutionnelles – une approche en terme de rapport institutionnel et de rapport personnel

#### *Chapitre B1 : Analyse écologique de l'évolution des programmes depuis 1980*

Cette étude a pour principal objectif de mettre en évidence les choix de transposition faits en France par la noosphère pour organiser l'étude du concept de fonction depuis 1980. Cette étude va nous permettre de mieux éclairer les choix actuels des programmes. En particulier, nous nous attacherons par un questionnement écologique à analyser l'évolution de l'usage des tableaux de valeurs et de variations durant cette période afin de mieux comprendre le rôle qu'ils sont sensés jouer dans l'écologie actuelle définie par les programmes les plus récents. Dans ce sens, l'analyse de programmes ayant existé à d'autres périodes d'enseignement permet d'envisager d'autres choix possibles pour un enseignement de la notion de fonction, s'inscrivant dans un système de contraintes institutionnelles différent du système actuel.

### Etat des lieux de l'enseignement actuel de la notion de fonction en classe de 2nde

#### *Chapitre B2 : Analyse écologique de manuels actuels de seconde*

Les manuels constituent une première étape de la transposition interne du savoir à enseigner tel qu'il est défini par les programmes vers le savoir réellement enseigné dans les classes. Ainsi, selon les termes de Ravel (2003), ils constituent un apprêtage du savoir. Dans cette étape, le jeu des conditions et des contraintes institutionnelles, où les auteurs de manuels gardent une certaine marge de manœuvre, conduit déjà à une certaine interprétation des termes du programme. Des choix sont déjà faits à ce niveau.

Nous chercherons alors à répondre aux questions suivantes : comment sont mises en place les nouveautés du programme 2000 de Seconde dans les différents manuels ? Quel est *l'écart* entre les intentions des programmes et l'application de ces intentions dans les manuels ? Quelles libertés ont pris les auteurs de manuels par rapport aux contraintes institutionnelles ?

Par ailleurs, ces manuels servent à leur tour d'institutions de référence pour les enseignants: On sait bien que les exercices proposés dans les manuels sont en général choisis par les professeurs et que si un type de tâche n'apparaît pas dans un manuel il risque de ne pas être utilisé par les professeurs. L'analyse des manuels nous permettra donc de mettre en évidence un nouveau système de contraintes institutionnelles auxquelles les professeurs vont être assujettis lors de la préparation de leur cours.

### *Chapitre B3 : Questionnaire aux professeurs*

Dans un second temps, nous avons voulu connaître les choix didactiques sur l'enseignement de la notion de fonction effectués par les enseignants. Il est possible que certaines des organisations didactiques et mathématiques au sein desquelles s'est inscrit la notion de fonction aux différentes périodes passées influencent les professeurs de Seconde pour leur enseignement et que celles-ci se constituent pour eux en autant de choix possibles d'enseignement ou d'obstacles:

Quel est la distance entre ces choix des professeurs et ce qui apparaît dans le programme et dans les manuels ? Observe-t-on une variabilité de choix entre les enseignants ? Quels sont les points essentiels où cette variabilité peut jouer ?

Pour répondre à ces questions, nous avons élaboré un questionnaire afin d'obtenir des données significatives sur les choix des enseignants pour l'enseignement de la notion de fonction et plus particulièrement pour l'utilisation des tableaux de valeurs et de variations. L'analyse de ce questionnaire nous donnera par ailleurs les moyens de montrer quelles sont les marges de manœuvre investies par les enseignants au sein de leur espace de liberté et quel système de contraintes et de conditions a pesé sur leurs choix.

### *Chapitre B4 : Questionnaire aux élèves*

Au-delà des choix des enseignants dans la préparation de leurs cours et l'organisation du travail de l'élève, notre tentative d'état des lieux n'aurait pas été complète, si nous n'avions pas interrogé les élèves eux-mêmes afin de voir ce qui avait été réellement appris. Nous avons ainsi élaboré un questionnaire en nous basant sur l'analyse institutionnelle réalisée précédemment. Il vise ainsi à interroger leurs capacités à résoudre différentes tâches mettant en jeu l'utilisation des tableaux de valeurs et de variations, en particulier au regard de la conversion dans d'autres registres.

### *Bilan des points phares des nouveaux programmes et des difficultés à les mettre en œuvre*

Les résultats obtenus dans les trois parties précédentes nous permettent de faire une synthèse du rapport institutionnel à l'objet fonction, ainsi que des rapports personnels des enseignants et des élèves. Dans ce paragraphe de conclusion, nous nous attacherons à faire plus particulièrement un bilan des points phares des nouveaux programmes 2000 et à montrer que certains éléments essentiels dans les caractéristiques de ces nouveaux programmes n'arrivent pas réellement à se mettre en place.

## PARTIE C : Expérimentation visant à tester la viabilité de certains points phares des programmes 2000.

A la lumière des analyses précédentes, nous avons déterminé certaines caractéristiques de l'organisation praxéologique proposée par les nouveaux programmes de 2000 autour de la notion de fonction qui ont du mal à vivre dans l'enseignement. Dans cette partie, nous nous proposons de produire des ingénieries didactiques visant à faire fonctionner ces aspects du programme dans des classes et à en tester la viabilité (en termes écologiques et économiques).

Ainsi, nous avons élaboré un ensemble de quatre séances avec une centration sur deux séances clefs mettant en œuvre des activités originales en début d'enseignement sur la notion de fonction. Cet ensemble a été expérimenté en totalité dans une classe. Les quatre séances ont été filmées et analysées. Nous avons ensuite renouvelé l'expérimentation de la deuxième activité dans une autre classe de seconde, que nous avons également filmée, pour confirmer un résultat important et pour pallier à une difficulté technique rencontrée lors de la première expérimentation. Enfin, à l'issue de ces expérimentations, nous avons fait passer un test dans une autre classe de seconde pour conforter certaines de nos conclusions.

Dans cette partie de notre travail, nous présenterons le travail d'élaboration des activités, et leurs analyses a priori, les différentes expérimentations et leur analyse a posteriori.

# PARTIE B :

## Etude des contraintes et libertés institutionnelles une approche en terme de rapport institutionnel et de rapport personnel

# CHAPITRE B1

# Analyse écologique de l’évolution des programmes depuis 1980

## I. Introduction

Les programmes constituent la première étape de l’étude de la transposition didactique, puisqu’ils sont le résultat de la transformation du savoir savant en savoir à enseigner. Lorsqu’un enseignant construit son cours, une des références à laquelle il est fortement lié est le programme. En effet, celui-ci précise, dans un premier temps, ce que le professeur est tenu de faire. En se plaçant dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique, le concept de rapport institutionnel permet de modéliser l’assujettissement de l’enseignant à l’institution scolaire au sein de laquelle il évolue.

L’analyse d’un programme permet d’identifier un rapport institutionnel à l’objet de savoir à enseigner, attendu dans l’institution scolaire. Cette analyse nous permet donc de mettre en évidence les choix de transposition pour organiser l’étude du concept de fonction depuis 1980 et de mieux éclairer les choix actuels des programmes. En particulier, nous nous attacherons par un questionnement écologique à analyser l’évolution de l’usage des tableaux de valeurs et de variations durant cette période afin de mieux comprendre le rôle qu’ils sont sensés jouer dans l’écologie actuelle définie par les programmes les plus récents.

Par ailleurs, l’analyse de programmes ayant existé à d’autres périodes d’enseignement permet d’envisager d’autres choix possibles pour un enseignement de la notion de fonction s’inscrivant dans un système de contraintes institutionnelles différent du système actuel. En effet, les enseignants qui doivent aujourd’hui enseigner la notion de fonction en seconde ont été « assujettis », en tant qu’élève ou en tant que professeur, à des systèmes de contraintes institutionnelles qui ont existé à propos d’un enseignement du concept de fonction dans le passé. Ces différents assujettissements sont potentiellement sources de « libertés » pour l’enseignant.

Nous avons choisi de commencer pour cette étude au début de la période de la contre-réforme des mathématiques modernes (à partir de 1980).

Ce choix s’est imposé d’une part pour des raisons pratiques de taille (nous nous limitons ainsi aux évolutions « récentes »), mais aussi par le fait que ce n’est qu’à partir de 1980 que des changements significatifs commencent à apparaître dans les programmes pour l’étude du concept de fonction. En effet, de 1971 à 1983 le programme sur la notion de fonction reste à peu près stable. D’autre part, 1980 est l’année de mise en place de la nouvelle classe de Seconde dite «indifférenciée » rassemblant tous les élèves.

Rappelons que l'époque 1980 – 2000 est marquée par cinq programmes différents correspondant à cinq périodes : 1980 – 1985, 1986 – 1989 et 1990 – 1999 et 2000 -. Chacun des programmes concernant l'enseignement de la notion de fonction en seconde de chacune de ces périodes conserve, pour l'essentiel, les objectifs et la substance du précédent. Néanmoins, on peut dégager des changements significatifs. D'un point de vue méthodologique, si nous limitons à la classe de seconde, nous évoquerons toutefois par endroit les programmes de Première et de Terminale pour mieux voir l'évolution de certains objets.

Pour cette analyse, nous nous centrerons sur les éléments suivants ;

- Généralités du programme
- Lien entre statistiques et fonctions
- Lien entre suites et fonctions
- Lien entre équations/inéquations et fonctions
- Utilisation de la calculatrice
- Place et rôle du registre graphique
- Tableau de valeurs et tableau de variations

Avant de commencer, nous donnons ci-dessous un bref aperçu de l'évolution des programmes de la classe de Troisième.

***Etude du concept de fonction dans les programmes troisième :***

Pendant la période 1971-1980, en troisième, il s'agit d'étudier les fonctions linéaires, les fonctions affines, des fonctions autres que les fonctions polynômes simples, par exemple, les fonctions constantes par intervalles et les fonctions affines par intervalles. Pour les fonctions linéaires, le programme demande aussi de dégager les expressions de fonction croissante, fonction décroissante, fonction constante, d'addition de fonctions.

A partir du programme 1980, nous constatons qu'il y a une nette diminution dans l'étude des fonctions : Il s'agit seulement d'étudier les fonctions linéaires et affines et leurs représentations graphiques.

Avec le programme 1990, on commence à parler du tableau de valeurs :

> « Savoir construire un tableau de valeurs d'une fonction ».

Également dans les chapitres « statistiques » qui apparaissent pour la première fois à ce niveau :

> « Savoir lire et exploiter des données statistiques mises sous forme de tableaux ou de diagrammes d'effectifs ou de fréquences, savoir calculer une moyenne. ».

Le programme précise aussi qu'on pourra, à partir de situations simples, construire des tableaux de valeurs d'une fonction non affine, mais aucune connaissance sur de telles fonctions n'est au programme.

Le nouveau programme de Troisième (appliqué à partir de 1999) n'apporte pas de changement notoire dans l'étude des fonctions.

Nous passons à présent à l'étude de l'évolution des programmes de la classe de seconde.

# II. Période 1980 – 1985

## II.1 Généralités

La contre-réforme de 1980 veut rompre avec la précédente. Elle ne privilégie plus les mathématiques comme univers de structures ; elle lutte contre l'axiomatique et le formalisme de la réforme précédente et réduit la théorisation et la formalisation au strict nécessaire. Elle s'appuie sur une conception des mathématiques dont la finalité est la résolution de problèmes, l'accent est mis sur l'activité des élèves.

L'introduction au programme de Seconde de 1981 explicite ainsi :

> « Les actuels programmes de mathématiques pour le premier cycle ont entrepris de lutter contre un formalisme qui, maltraitant l'acquis intuitif des élèves, isolerait la démarche pédagogique des réalités de l'expérience et de l'action…
> Le présent programme est celui d'une classe de seconde pour tous ; il convenait de le préserver d'une intervention artificielle de descriptions de structures, et par conséquent de ne pas l'alourdir d'une algébrisation prématurée. »

Le programme de Seconde comporte huit rubriques dont une est consacrée à l'étude des fonctions. On voit donc que les fonctions occupent une place importante, qui constitue un habitat indépendant intitulé « Fonctions ».

Cette rubrique comporte trois paragraphes :

> a. Exemples de fonctions introduits par des procédés très divers
> b. Comportement global d'une fonction
> c. Comportement local d'une fonction

Dans le premier paragraphe, on précise le registre et le contexte qu'on va utiliser pour cette étude :

> **« a- Exemples de fonctions introduits par des procédés très divers :**
> - formules explicites, tableaux de données numériques, touches de la calculatrice,
> - états de systèmes physiques, biologiques, économiques, mesures de grandeurs géométriques ou cinématiques,
> - fonctions trigonométriques.
>
> Représentations graphiques ; leur exploitation. Fonction définie par une représentation graphique. Restriction d'une fonction à un intervalle. »

Ce paragraphe montre le souci des auteurs du programme de ne pas se limiter à l'entrée par la représentation par une formule algébrique, même si c'est la première citée dans la liste. On voit que le tableau de valeurs fait son entrée sous l'appellation « tableaux de données numériques », ce qui est à rapprocher des débuts de l'enseignement des statistiques qu'inaugurent également ces programmes. De même, on voit que l'on peut définir une fonction avec les « touches de la calculatrice », autre tendance amorcée par la contre-réforme. La représentation graphique peut servir de définition d'une fonction, mais on lui donne une place à part, en fin de liste. On sent bien une volonté de sortir du tout algébrique, mais la forme de présentation peut laisser penser qu'il sera difficile aux manuels et aux enseignants de mettre réellement en œuvre ces idées novatrices.

L'aspect global concerne les problèmes mettant en jeu le comportement d'une fonction sur un intervalle donné (sens de variation, majorations de la fonction et de son taux de variation, recherche de maxima et de minima, interprétation, parité et périodicité). Pour ces notions, plus qu'une étude formelle, on met l'accent sur l'exemplification dans des contextes variés et la représentation graphique « soignée » apparaît comme un moyen privilégié de donner du sens :

> « Ces notions seront dégagées d'exemples variés, en liaison avec celles pratiquées en physique (taux de variation). On s'attachera à des représentations graphiques d'une bonne précision, en repères orthogonaux. »

Le parallèle avec des notions physiques et l'utilisation de la notion de taux de variation pour l'étude du sens de variation d'une fonction sont importants. Ainsi, dans un manuel de cette époque (Hachette Math $2^{nde}$ – 1981), on trouve le résultat suivant, qui suit les définitions d'une fonction croissante ou décroissante et du taux de variation :

> « La fonction f est croissante sur I si, et seulement si, son taux de variation est positif, quel que soit le choix des éléments x et x' de I.
> La fonction f est décroissante sur I, si et seulement si, son taux de variation est négatif, quel que soit le choix des éléments x et x' de I. »

Néanmoins, si le taux de variation apparaît comme un outil intéressant pour donner du sens aux variations des fonctions en lien avec des concepts cinématiques et physiques (pente des sécantes, taux d'accroissement d'une grandeur, vitesse moyenne…), on peut se poser la question de la pertinence de son utilisation comme outil privilégié pour démontrer effectivement qu'une fonction est croissante ou décroissante. Une étude directe de la comparaison de deux valeurs de la fonction semble souvent plus efficace en attendant les théorèmes sur la somme, le produit, la composée, etc.

L'aspect local concerne les problèmes mettant en jeu le comportement d'une fonction sur des intervalles convenablement choisis. Par contre, ici, il ne s'agit pas de donner, d'après le programme, une définition générale des propriétés locales, mais de dégager ces notions à travers différents exemples.

Les activités sur le comportement local d'une fonction (recherche de valeurs approchées, calcul d'erreur, étude des variations de fonctions) fournissent un bon terrain pour la mise en place de fonctions de référence et d'ordres de grandeur simples. Outre leur intérêt simple, ces activités quantitatives préparent la mise en place du concept qualitatif de limite d'une fonction en un point et des dérivées, dont l'étude figure au programme de Première.

Une nouvelle rubrique apparaît dans ces programmes : il s'agit des thèmes. Le programme l'introduit ainsi :

> « La classe de mathématiques est, dans son rôle essentiel, un lieu de découverte, d'exploration de situations plus ou moins aisément maîtrisables, de réflexion sur des problèmes résolus. De ce fait, à chaque séquence du programme correspondent des thèmes d'activités, dont le choix demande à être adapté aux possibilités de la classe et éventuellement relié à son orientation ultérieure ; il ne saurait être question de traiter tous les thèmes mentionnés. Les questions obligatoires sont en nombre restreint et n'occupent que peu d'épaisseur de cours. »

Les thèmes ont ainsi un statut particulier au sein des programmes. La nature des problèmes proposés dans ce cadre est assez ambiguë : ce sont soit des problèmes d'application directe du cours, soit des problèmes de découverte d'idées. Ils sont là à titre indicatif, donc laissés au choix des auteurs des manuels, puis de l'enseignant. Autrement dit, il est possible qu'un problème soit mentionné dans les Thèmes par le programme, mais ne soit pas présent dans le manuel et surtout dans la classe.

Le programme présente 26 thèmes en total pour 8 chapitres différents. Ainsi il y a 6 thèmes pour la rubrique « Fonctions », alors qu'il n'y a pas de thème pour les chapitres « Statistique » et « Equations et Système ».

Les thèmes pour le chapitre « Fonctions » sont les suivantes :

- Majoration, minoration d'une fonction sur un intervalle
- Recherche de maximums, de minimums, associée à des problèmes élémentaires d'optimisation
- Taux de variation : encadrement de ce taux ; inégalités du type $|f(y) - f(x)| \leq M\ |y - x|$ pour tous x, y ; interprétation géométrique
- Emploi des variations d'une fonction f pour l'étude d'équations $f(x) = b$ et d'inéquations
- Exemples numériques d'équations du second degré
- Convexité de la fonction $x \to x^2$.

## II.2 Relation statistiques et fonctions

Comme nous l'avons dit ci-dessus, les statistiques apparaissent, pour la première fois en Seconde dans cette période. L'importance de l'étude des statistiques en lien avec d'autres notions, comme les fonctions, est explicitement indiqué dans les commentaires :

> « Les séquences d'activités statistiques […] sont aussi l'occasion d'appliquer de nombreuses autres parties du programme (barycentres, fonctions en escalier, représentations graphiques). »

Notons que les expressions « lecture de tableaux » et « analyse des graphiques » apparaissent dans ce chapitre. Ainsi, ce chapitre nourrit et renforce l'utilisation du tableau de valeurs et de la représentation graphique.

## II.3 Relation suites et fonctions

Dans les années 1970, les suites occupaient une place très marginale par rapport aux fonctions qui jouaient un rôle premier dans tous les programmes. Elles étaient totalement absentes des programmes de Seconde et de Première et n'apparaissent qu'en Terminale comme un cas particulier de fonctions.

L'époque de la contre-réforme marque une montée en puissance considérable des suites. Les programmes insistent sur leur importance égale par rapport aux fonctions, sur l'interaction constante entre le discret et le continu, ainsi que sur l'autonomie propre de chacun de ces concepts ;

> « Les concepts de suite et de fonction ont dans l'enseignement une importance égale ; en effet, les mathématiques ont besoin aussi couramment de représentations discrètes que de représentations continues et elles passent fréquemment des unes aux autres. Il est donc souhaitable que l'étude de ces concepts soit menée de front, tout en laissant à chacun d'eux sa propre autonomie ; une suite ne doit pas être considérée uniquement comme un cas particulier de fonction » (Commentaire du programme de Seconde - 1981)

Cependant la notion de suite apparaît comme pré-construite en classe de Seconde dans le chapitre « Activités numériques » à l'occasion de l'approximation d'un nombre réel donné, en l'absence de descriptions théoriques et de définitions sur les limites :

> « Exemples d'approximation d'un nombre réel donné au moyen de suites. Aucune définition sur les limites ne figure au programme.
> Thèmes (à titre indicatif) :
> 1. Exemples de suites convergeant vers $\sqrt{p}$ (p donné strictement positif) : Dichotomie ; […]
> 2. Exemples de suites convergeant vers $\pi$ » (Programme de Seconde)

En Première et en Terminale, l'étude de suites occupe des rubriques spécifiques intitulées «Suites numériques » toujours placées avant l'étude des fonctions. Les suites ne sont pas définies seulement comme valeurs d'une fonction, mais aussi par des méthodes itératives faisant intervenir la différence et le rapport de deux termes consécutifs.

## II.4 Equations et inéquations

A l'époque 1970-79, les équations à une inconnue étaient regroupées essentiellement dans une rubrique séparée « Equations et inéquations » du programme de Première. On y abordait les équations du premier et du second degrés, les équations bicarrées et les équations irrationnelles simples de la forme $\sqrt{f(x)} = g(x)$ où $f$ et $g$ sont des fonctions polynômes. Certaines équations trigonométriques simples étaient aussi introduites. Cependant, toutes les équations citées étaient étudiées au moyen de techniques algébriques, plus précisément de transformations algébriques. La notion de fonction n'apparaissait pas comme outil dans cette étude.

En 1980-85, Il n'y a aucune trace d'étude d'équations à une inconnue par des techniques algébriques, à l'exception des équations du second degré essentiellement traitées en Première.

Les équations du premier degré sont entièrement traitées au collège et ont disparu du lycée.

Cette époque est marquée par une modification importante dans l'étude des équations, donc dans l'évolution du rapport institutionnel à cet objet. En effet, les équations font une entrée en force dans le domaine de l'analyse. Les techniques d'étude des équations vont aussi changer profondément. Ces techniques ne se basent plus seulement sur les calculs algébriques, mais sur des propriétés des fonctions et des suites numériques. Il ne s'agit plus seulement de résoudre algébriquement les équations pour obtenir leurs solutions exactes, mais de montrer l'existence et/ou d'obtenir des valeurs approchées des solutions.

Voici les extrais des programmes :

> Activités numériques – Cours : « Exemple d'approximation d'un nombre réel à l'aide de suites » et thème : « Approximation $\sqrt{p}$ par des suites. Dichotomie »
> Fonctions – thèmes : « Emploi des variations d'une fonction f pour l'étude de l'équation $f(x) = b$ et d'inéquations».
> Equations et systèmes : « L'objectif n'est pas d'apprendre des formules de résolution, mais d'organiser et de conjuguer des études numériques et des études graphiques » (programme de Seconde)

Ainsi, les équations ne sont plus désormais étudiées pour elles-mêmes, mais solidairement avec l'étude des fonctions et des suites. Les équations constituent un terrain d'intervention de ces dernières.

## II.5 L'utilisation de la calculatrice

A l'époque précédente, l'usage de tables numériques, de la règle à calcul et des machines à calculer de bureau figuraient dans les programmes. Cependant, l'accent était mis essentiellement sur les deux premiers ;

> « L'usage des tables numériques doit être rendu familier aux élèves de toute section : tables de fonctions données par une « formule » (carrés, cubes, racines, inverse…), tables de rapports trigonométriques tels qu'ils ont été introduits dans le premier cycle. » (Instruction n° IV-70-70 du 6 février 1970, classe de Seconde)

L'intégration officielle en 1981 des calculatrices fait disparaître tous les anciens outils de calcul, même les tables de logarithmes et la règle à calcul.

> « L'utilisation systématique des calculatrices, qui dispense naturellement d'avoir recours aux instruments antérieurs (table de logarithmes, règle de calcul,…) constitue une des nouveautés du programme de mathématiques. […] Dès le début de l'année, il sera bon de vérifier que chacun sait utiliser son propre instrument, et ce sera une occasion de préciser l'usage des parenthèses et de réviser les propriétés de R. » (Commentaire du programme de Seconde, en vigueur en 1982).

On précise aussi son utilisation pour l'étude de fonctions,

> « Les touches de la calculatrice permettent d'accéder à des fonctions. Une représentation graphique de ces fonctions permet d'avoir une vue d'ensemble de la correspondance ; l'usage de la touche donnant la

> fonction réciproque permet ensuite de préciser la notion de bijection et les limitations imposées » (Commentaire du programme de Seconde, en vigueur en 1982).

Les programmes de Première et de Terminale demandent également d'utiliser largement les calculatrices.

## II.6 Place et rôle du registre graphique

Soulignons d'abord qu'à l'époque des mathématiques modernes, dans les années 1970, l'expression « représentation graphique » figurait déjà dans les programmes, mais elle apparaissait toujours comme la conclusion de l'étude des fonctions fondamentales et simples (fonctions affines et affines par intervalles ; fonctions polynômes et rationnelles). Elle avait pour fonction de synthétiser des résultats théoriques obtenus. Plus précisément, une courbe résumait les principales propriétés d'une fonction étudiée (monotonie, maximum, minimum,…). Elle permettait aussi parfois d'interpréter et d'illustrer certaines notions ou propriétés des fonctions (notion de dérivée, théorème des valeurs intermédiaires,…). Cependant, les représentations graphiques venaient toujours après les résultats théoriques.

En 1980–85, l'examen des programmes du lycée montre qu'une place plus importante est octroyée aux représentations graphiques. Par exemple, le programme de Seconde indique :

> « On s'attachera à des représentations graphiques d'une bonne précision… On habituera ainsi les élèves à lire et à interpréter un graphique.
> Quant aux équations et inéquations affines à deux inconnues, le programme explicite : « l'objectif n'est pas d'apprendre des formules de résolution, mais d'organiser et de conjecturer des études numériques et des études graphiques […]
>
> Dans l'étude des fonctions et suites : « On fera ressortir toute l'importance de l'étude numérique et de la représentation graphique. […]. On ne négligera aucune occasion d'employer, pour l'analyse d'une question ou pour une synthèse des résultats obtenus, des représentations graphiques. » (Programme de Première)
>
> Quant aux fonctions : « On entretiendra l'habitude de la représentation graphique, car celle-ci joue un rôle important dans la description du comportement : une indication d'allure peut suffire pour exprimer un aspect qualitatif, un tracé soigné est nécessaire lorsqu'on passe aux aspects quantitatifs. » (Programme de Terminale)

Les niches d'illustration, d'interprétation et de synthèse d'un résultat théorique déjà présentes dans les programmes de l'époque précédente, deviennent plus importantes. De plus, les fonctions ne sont plus exclusivement données par l'expression analytique, mais maintenant peuvent être définies par le graphique.

> « Exemples de fonctions introduites par des procédés très divers : […]. Fonction définie par une représentation graphique. » (Programme de Seconde)

Les représentations graphiques occupent désormais une nouvelle niche *: permettre une démarche expérimentale*. On voit apparaître des expressions comme « analyse des graphiques », « conjecturer à partir d'études graphiques », « analyser à l'aide des graphiques une question »…

Cette fonction d'expérimentation du graphique marque un changement radical du rôle des représentations graphiques par rapport à l'époque précédente. En effet, alors que dans les années 1970 le graphique venait après les résultats théoriques, il peut désormais apparaître comme registre d'entrée. Plus précisément, des résultats théoriques (propriétés d'un objet, relations entre des objets…) peuvent être conjecturés à partir d'observations graphiques.

### II.7 Tableau de valeurs et tableau de variations

L'objet tableau de valeurs fait son entrée officielle dans les programmes en 1981, pour la première fois, avec l'étude des statistiques et celle des fonctions sous l'appellation « tableaux de données numériques»

Dans les manuels de cette période, l'emploi du tableau de valeurs est variable et il est plutôt lié aux différents contextes. Ils se trouvent en début de chapitre avec les activités introductives pour arriver à conjecturer la définition d'une fonction, puis ils apparaissaient dans l'étude des fonctions de référence où ils servent d'appui pour les constructions graphiques. Aucun exercice n'utilise par contre, un tableau de valeurs comme registre d'entrée dans l'étude des fonctions.

Pour la conversion d'un tableau de valeurs à une représentation graphique dans des contextes extra mathématiques, on utilise chaque fois l'un de deux arguments suivants: « *joindre les points du tableau le plus régulièrement possible* » et « *joindre les points du tableau avec des segments de droite* ».

- *Quant au tableau de variations :*

Soulignons d'abord que dans les époques des années 1970 l'étude du sens de variations d'une fonction figurait déjà dans les programmes mais implicitement, c'est-à-dire qu'il n'y avait pas de paragraphe à part pour cette étude. A partir de 1981, on voit des paragraphes spécifiques pour l'étude du sens de variation et des variations d'une fonction dès la classe de Seconde. L'objet tableau de variations n'est, par contre, jamais mentionné en aucun lieu du programme à cette époque. Néanmoins, dans les manuels de cette période, le tableau de variation est utilisé comme un résumé du sens de variation d'une fonction et il n'y a pas de type de tâche spécifique lié à cet objet.

## III. Période 1986–1989

### III.1 Généralités

En 1986, le programme de seconde déclare conserver, pour l'essentiel, les objectifs et la substance des programmes mis en vigueur respectivement en 1981, 1984 et 1985. Ils précisent cependant :

> [La] « tâche principale est d'entraîner les élèves à la réflexion et à l'initiative personnelle et l'accent doit être mis sur l'acquisition de méthodes, aussi bien au niveau du cours que des activités de résolution d'exercices et de problèmes »

Et concernant le statut des thèmes :

> « Des thèmes d'activités sont mentionnés : on notera qu'ils font l'objet de listes indicatives, c'est-à-dire ni impératives ni exhaustives ; aucune connaissance n'est exigible des élèves sur le contenu des thèmes. »

Globalement le programme reprend les mêmes rubriques qu'en 1981, sauf la rubrique « Angles et rotations (Géométrie plane) » qui a disparu.

Néanmoins, pour la rubrique « Fonctions », on remarque des changements importants par rapport au programme précédent. Dans l'introduction de la rubrique, le programme indique :

> « La notion de fonction sert à décrire et à étudier le comportement de phénomènes continus et joue un rôle central non seulement en mathématiques mais dans toutes les sciences. On exploitera donc, pour mettre en place cette notion, des *situations variées* : tracés graphiques, touches de la calculatrice, algorithme de calcul, relations de dépendance issues de la géométrie, de la mécanique, des sciences physiques et biologiques, de la vie économique et sociale. Les activités combineront ensuite le *traitement mathématique* et *l'interprétation des résultats* obtenus dans le cadre des situations étudiées. » (programme seconde 1981)

On voit donc que la variété des registres de représentation à travers le lien avec de nombreux domaines extra-mathématiques est accentuée par rapport au programme précédent. C'est non seulement une entrée dans la notion de fonction qui est en jeu, mais une volonté de mettre en place des liens avec d'autres disciplines dans lesquels les résultats mathématiques vont devoir être interprétés.

Comme précédemment, il y a trois paragraphes dans cette rubrique, mais ceux-ci ne coïncident plus avec le découpage précédent :

- Exemples divers de fonctions
- Variation et représentation graphique des fonctions
- Notions sur les fonctions circulaires cos x et sin x.

Le premier paragraphe reprend en fait les points essentiels sur le comportement global d'une fonction :

> Représentations graphiques dans un repère orthonormal, dans un repère orthogonal.
> Parité, périodicité ; interprétation graphique.
> Fonctions croissantes, fonctions décroissantes.
> Maximum, minimum d'une fonction.

Le deuxième paragraphe est consacré à l'étude des variations et à la représentation graphique des fonctions. On constate que le registre graphique prend une place de plus en plus importante, au détriment de la représentation analytique. Le tableau de valeurs, quant à lui, apparaît sous l'appellation « tableaux de données » comme dans la période précédente, le tableau de variations n'est par contre jamais mentionné en aucun lieu dans ce programme.

On parle pour la première fois, avec ce programme, des fonctions en escalier ou affines par morceaux en précisant qu'aucune connaissance spécifique n'est exigible des élèves sur ces types de fonctions.

> « L'étude de situations conduisant à des fonctions en escalier ou affines par morceaux et la représentation graphique de celles-ci constituent des activités souhaitables. »

L'étude des fonctions trigonométriques trouve une place importante dans cet habitat comme dans le programme précédent et on consacre le dernier paragraphe à cette étude.

Notons qu'il y a deux changements importants dans l'étude du concept de fonction par rapport au programme 1981 ;

- La notion de taux de variation n'est plus au programme, on demande d'étudier la monotonie d'une fonction de « façon directe ».

Parallèlement à ce changement, le thème lié à cette notion « Taux de variation : encadrement de ce taux ; inégalités du type $|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|$ pour tous x, y ; interprétation géométrique » a disparu.

- L'étude du comportement local d'une fonction a disparu. Cette étude est déplacée en classe de Première. Le but de l'étude du comportement local d'une fonction était de préparer les élèves à la notion de limite d'une fonction et des dérivées qui figurent au programme de Première.

Nous constatons donc deux changements importants par rapport au programme 1981 ;

- L'affirmation des liens avec les autres disciplines et la variété des modes de représentation apparaissent de façon encore plus centrale.
- Les outils d'étude locale, permettant, entre autres, de mettre en place un outillage théorique pour l'approximation sont repoussés en classe de Première.

On assiste ainsi à une baisse de l'appareillage théorique sur les fonctions en même temps qu'à un ancrage plus fort sur le lien avec les domaines extra-mathématiques mettant en avant les divers modes de représentation. En particulier la représentation graphique prend du terrain sur la représentation algébrique.

## III.2 Relation statistiques et fonctions

Comme dans la période précédente, l'étude des statistiques trouve une place importante avant celle des fonctions. Le fait d'introduire les statistiques a pour conséquence d'introduire les tableaux de valeurs de façon plus importante et à une place différente de la précédente. L'importance de l'utilisation du graphique et du tableau de valeurs est clairement explicitée :

> « Prise de contact avec les données, lecture de tableaux ;…
> Analyse des graphiques : questions auxquelles ils permettent de répondre et nouvelles questions qu'ils conduisent à poser » (programme de Seconde)

L'utilisation du tableau de valeurs et de la représentation graphique pour cette étude est encore renforcée et annoncée plusieurs fois :

> «C'est un secteur d'investissement des activités numériques, des représentations graphiques ou des outils de calcul (calculatrices, ordinateurs)… Tableaux de données… A l'issue de la Seconde, les élèves doivent savoir analyser, sur un exemple, un tableau de données… » (Programme de Seconde)

## III.3 Relation suites et fonctions

Les suites ont totalement disparu du programme de Seconde et n'apparaissent qu'à partir de la classe de Première. Cependant, elles conservent encore une grande importance par rapport aux fonctions. Le programme de Terminale déclare :

> « En analyse, le programme combine l'étude des fonctions avec celle des suites (cette dernière étant moins approfondie en Terminale D) »
> « Le programme d'analyse porte sur les suites et les fonctions numériques, ce qui permet d'étudier des situations discrètes et des situations continues ».
> « Les interactions entre  suites et fonctions sont à souligner : mise en valeur des analogies et des différences, passage du contenu au discret au continu (emploi des ressources du calcul différentiel pour l'étude de suites). »

Les objectifs de l'étude de suites sont explicités par les programmes :

En Première,

> « L'objectif principal est de familiariser les élèves avec la description de situations discrètes simples à l'aide de suites, de mettre ainsi en évidence quelques modes de génération de suites et quelques résultats sur le comportement global et asymptotique des suites. »

En Terminale,

> « L'objectif est double : fournir quelques outils efficaces pour l'étude du comportement global et asymptotique d'une suite donnée ; explorer, sur des exemples simples, quelques méthodes d'approximations d'un nombre au moyen de suites. »

Notons de plus que l'étude des suites se place toujours avant l'étude des fonctions dans les programmes.

## III.4 Equations et inéquations

Comme dans la période précédente, les équations et inéquations sont étudiées solidairement avec l'étude des fonctions et des suites. La différence entre ces deux périodes se trouve dans l'évolution des types de tâches liées à la notion de fonction et dans l'apparition de certaines tâches nouvelles.

Certains « thèmes » restent présents dans ce programme, par exemple « Emploi des variations d'une fonction f pour l'étude d'équations f(x) = λ et inéquations». Nous constatons cependant la disparition de la rubrique « thèmes » de la partie « Activités numériques », donc la disparition du type de tâche « Approximation de $\sqrt{p}$ par des suites ». Cependant, y figure encore le type de tâche plus général « Approximation d'un nombre réel au moyen d'encadrements ».

Notons de plus que l'étude d'équations du second degré ne se fait plus en classe de Seconde.

### III.5 Utilisation de la calculatrice

La place des calculatrices devient encore plus importante dès la classe de Seconde.

> « Les problèmes et les méthodes numériques doivent eux aussi tenir une large place. L'emploi systématique des calculatrices scientifiques renforce les possibilités d'étude de ces questions, aussi bien pour effectuer des calculs que pour vérifier des résultats ou alimenter le travail de recherche. En particulier, en analyse, l'exploitation des touches de la calculatrice permet d'accéder rapidement à des fonctions diversifiées et à leur représentation graphique» (programme de Seconde)

De plus, désormais on parle, à partir de la Première, de l'utilisation systématique des calculatrices scientifiques *programmables*. L'emploi du matériel informatique existant dans les établissements est encouragé.

L'intégration officielle des calculatrices programmables dans l'enseignement implique l'apparition d'un nouvel objet « programmation ». A son propos, les capacités exigibles sont explicitées par les programmes.

Les élèves doivent savoir,

- à la fin de la classe de Première, programmer le calcul de valeurs numériques d'une fonction sur des exemples simples.
- en Terminale, programmer le calcul des valeurs d'une fonction, le calcul du n-ième terme d'une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1}= f(u_n)$ et une condition initiale.

La programmation constitue un objet intermédiaire entre les calculatrices programmables et les algorithmes. Son intégration dans l'enseignement est sensée faciliter l'étude de fonctions et des suites.

### III.6 Place et rôle du registre graphique

Dans cette période, l'activité expérimentale est davantage mise en avant. De plus, on affirme que cette activité est l'un des moments de l'activité mathématique. Cette importance se manifeste aussi dans la place plus importante octroyée aux représentations graphiques. Leur cadre d'intervention est très large : les différentes parties des programmes de Seconde et de Première, et l'ensemble des parties du programme de Terminale. Leur rôle général change aussi radicalement :

> « Les activités graphiques doivent tenir une place très importante dans les différentes parties du programme. » (Programme de Seconde et de Première)
>
> [Elles] « permettent de donner un contenu intuitif et concret aux objets mathématiques étudiés, […] concourent aussi à la formation personnelle des élèves, en développant les qualités de soin et de précision et en mettant l'accent sur des réalisations combinant un savoir-faire manuel et une réflexion théorique. » (programme de Terminale).

A l'époque précédente, les représentations graphiques jouaient un rôle important dans l'activité expérimentale. Cependant, les expressions « *expérimentation graphique* » et « *expérimentation numérique* » ne figuraient pas dans les libellés des programmes. En 1986, elles apparaissent explicitement :

> « Les activités doivent combiner les expérimentations graphiques et numériques avec les justifications adéquates » (programme de Première)

Une nouvelle niche importante des représentations graphiques est aussi mise en avant, permettre de donner du sens aux inégalités et aux inéquations et de diminuer les difficultés de la manipulation algébrique concernant ces dernières :

> « Activités numériques : les interprétations graphiques, l'usage des calculatrices jouent un rôle capital à la fois comme outils et comme source de problème. […].
> - Dans le calcul littéral, les principales difficultés concernent les inégalités. Pour que ces inégalités prennent sens et ne se réduisent pas à un formalisme purement algébrique, il est utile de relier leur étude à celle des fonctions, tant du point de vue numérique que graphique…
> - De nombreuses situations conduisent à des inéquations. Leur résolution doit être abordée très progressivement, en prenant appui sur des interprétations graphiques… » (Programme de Seconde)

Les représentations graphiques deviennent ainsi incontournables dans l'enseignement avec sa nouvelle niche et le statut donné à l'activité expérimentale.

## III.7 Tableau de valeurs et tableau de variations

Comme dans la période précédente, le tableau de valeurs fait son entrée sous l'appellation « tableaux de données » et le tableau de variations n'est, par contre, toujours pas mentionné dans ce programme.

Le statut du tableau de valeurs ne change apparemment pas par rapport à l'époque précédente dans les manuels que nous avons consultés. Certains d'entre eux y recourent fréquemment pour amorcer une représentation graphique ou pour suggérer le sens de variation d'une fonction, d'autres semblent minorer son rôle dans la construction graphique dans les contextes différents.

Comme pour les tableaux de valeurs, l'utilisation des tableaux de variations dans les manuels est identique par rapport à la période précédente et le tableau de variations ne sert qu'à résumer le sens de variation d'une fonction.

# IV. Période 1990–1999

## IV.1 Généralités

Le programme de seconde mis en place en 1990 déclare conserver, pour l'essentiel, les objectifs et la substance du programme de 1986. La raison du changement est essentiellement d'assurer une bonne continuité avec les nouveaux programmes de collège (mis en vigueur en 1989-1990 au niveau de la classe de troisième) qui « font davantage appel à l'activité des élèves et sont plus tournés vers la résolution de problèmes et les applications ».

Ce nouveau texte est composé de trois parties : exposé des motifs, organisation de l'enseignement et programme. Ce type de présentation est nouveau par rapport aux périodes précédents.

Les intentions majeures sont précisées dans la première partie, parmi celles-ci, les auteurs signalent  leur volonté d'« entraîner les élèves à la pratique d'une démarche scientifique, en développant conjointement les capacités d'expérimentation et de raisonnement » et « le rôle formateur des activités de résolution de problèmes ».

C'est dans la seconde partie, en fixant les objectifs et fonctions des différents types d'activités, que l'on détaille le rôle de ces problèmes :

> « […], la résolution de problèmes et l'étude de situations occupent une part importante du temps de travail […], il convient d'articuler la mise en place de contenus nouveaux avec l'étude de situations assez riches, qui peuvent, selon les questions étudiées, servir de motivation, fournir des secteurs d'intervention, ou constituer le support même pour cette mise en place ».

La rubrique « thèmes » disparaît définitivement des programmes, alors qu'une nouvelle rubrique intitulée « travaux pratiques » est introduite dans chaque chapitre :

> « On a voulu insister sur l'importance du travail personnel des élèves, tant au lycée qu'à la maison, et sur le rôle formateur des activités de résolution de problèmes. Dans cette perspective, une rubrique de travaux pratiques a été introduite dans chaque chapitre. »

Le programme comporte cinq chapitres :

- Objectifs et capacités valables pour l'ensemble du programme
- Problèmes numériques et algébriques
- Fonctions
- Statistiques
- Géométrie

Le chapitre « Activités numériques » du programme précédent est donc remplacé par le chapitre « Problèmes numériques et algébriques ». Ainsi, cette dernière, introduite pour la première fois dans le programme de Première de 1986/1989, se trouve maintenant dans le programme de Seconde. On parle pour la première fois de la notion de variable dans cette partie :

> « Un objectif important est d'amener les élèves à une meilleurs maîtrise de l'emploi de variables, à travers l'étude d'exemples où elles expriment des quantités dont la signification est clairement perçue ;[…] »

Et cette notion est de nouveau mentionnée dans le chapitre « Fonctions ». Il est notamment souligné qu'un des objectifs de l'introduction de la notion de fonction en classe de $2^{nde}$ est de « familiariser les élèves avec la description de phénomènes continus à l'aides de fonctions » : la notion de variable de IR est ainsi présente derrière l'appellation « phénomènes continus ».

Le chapitre « fonctions » comporte deux paragraphes :

- Génération et description des fonctions
- Fonctions usuelles

Dans l'époque précédente, il y avait trois paragraphes qu'ils s'agissaient « Exemples divers de fonctions / Variation et représentation graphique des fonctions / Notions sur les fonctions circulaires ». Ainsi, l'étude de fonctions, avec ces deux paragraphes, est réduite à quelque chose de très sommaire.

Les liens avec les autres disciplines et la variété des modes de représentation sont abordés dès le premier paragraphe :

> « On exploitera des situations variées : tracés graphiques, touches de la calculatrice, algorithmes de calcul, relations de dépendance issues de la géométrie, de la mécanique, des sciences physiques et biologiques, de la vie économique et sociale. »

La représentation graphique est mentionnée à plusieurs reprises. Le tableau de valeurs et le tableau de variations ne sont, quant à eux, pas mentionnés de façon explicite.

En outre, l'accent est mis sur trois propriétés : la parité, les extrema et le sens de variation. L'attachement à la mise en pratique de ces notions est bien mis en évidence :

> « Ces notions sont mises en place uniquement sur des exemples ; on mettra en valeur leur signification graphique… ; on s'attachera à mettre en évidence, à travers les exemples étudiés, la signification des propriétés des fonctions concernées. ».

On retrouve ainsi dans la partie Travaux Pratiques des exercices consacrés à ces notions : « Exemples simples d'étude de comportement de fonctions tels que : signe, variations, recherche de maximums et de minimums, représentations graphiques dans un repère (orthonormal ou orthogonal). ». Le programme aborde même la question des méthodes de résolution qui vont être exposées aux élèves : « On entraînera les élèves à mettre en œuvre les méthodes employées pour les fonctions usuelles pour l'étude de comportements de fonctions telles que $x \to 2x^2 + 1$, $x \to (x-1)^2$, $x \to \dfrac{2}{x+1}$, $x \to \dfrac{1}{x^2+1}$, $x \to x\,(1-x)$, $x \to \sin 2x$, toutes les indications utiles étant fournies.».

Comme dans le programme précédent, l'étude générale des fonctions polynômes de degré deux et des fonctions homographiques est hors programme.

Le thème « *Etude d'équations f(x) = λ au moyen des variations de la fonction* » du programme précédent, prend un caractère uniquement graphique dans la rubrique « Travaux pratiques » de ce programme, sous le titre *« Etude graphique d'équations de la forme f(x) = λ, où λ a une valeur numérique donnée* ».

En 1981, les majorations et les minorations d'une fonction sur un intervalle, l'approximation au voisinage de zéro d'une fonction, l'utilisation de majorations dans le calcul approché des valeurs d'une fonction et le calcul d'erreurs, l'approximation d'un nombre réel donné au moyen de suites sont introduites en classe de Seconde. En 1986, il ne subsiste de cette organisation que l'approximation d'un nombre réel au moyen d'encadrements, la majoration et la minoration d'une fonction sur un intervalle. En 1990, tout a disparu du programme de Seconde.

On voit donc des changements importants par rapport au programme précédent qui accentuent encore les changements déjà amorcés. La représentation graphique prend une place encore plus grande. La volonté ambitieuse des premiers programmes de la contre-réforme, de donner les outils théoriques de cette étude, à travers l'étude du comportement local des fonctions, est ici définitivement abandonnée, tout ce qui relève de l'approximation est reléguée dans le calcul outillé par la calculatrice.

## IV.2 Relation statistique et fonctions

La situation est désormais modifiée pour les statistiques. En effet, les nouveaux programmes du Collège (appliqué à partir de 1989 pour la Troisième) développent un enseignement des statistiques, pour la première fois, qui couvre tout le programme de statistique de Seconde.

L'étude de « lecture, interprétation et réalisation de tableaux et de graphiques » apparaît dès la classe de Sixième et de Cinquième.

Le programme de seconde a pour le but de compléter les acquis du collège. Le chapitre « statistiques » présente un triple intérêt :

> « D'abord la lecture pertinente de tableaux statistiques est nécessaire à la compréhension des phénomènes économiques et sociaux. Ensuite, c'est un excellent terrain pour des activités interdisciplinaires (…). En autre, savoir organiser, représenter et traiter des données… ».

On trouve des travaux pratiques qui renforcent l'utilisation du graphique et du tableau de valeurs :

> « Les activités mettrons en évidence, à partir d'un tableau (…). Lecture et exploitation de données statistiques mises sous forme de tableaux (…). Présentation des résultats (histogrammes, graphiques…). ».

## IV.3 Relations suites et fonctions

Comme dans la période 1986-89 les suites sont absentes du programme de Seconde. De plus, l'importance de l'étude des suites, surtout des suites récurrentes a diminué.

Dans le programme de Terminale de l'époque précédente, on déclarait :

> « Le programme d'analyse porte sur les suites et des fonctions numériques, ce qui permet d'étudier des situations discrètes et des situations continues.
>
> Pour les suites, l'objectif est double : fournir quelques outils efficaces pour l'étude du comportement global et asymptotique d'une suite donnée ; explorer, sur des exemples simples, quelques méthodes d'approximations d'un nombre au moyen de suites. […]. »

Et encore,

> « Les interactions entre suites et fonctions sont à souligner : mise en valeur des analogies et des différences, passage du continu au discret (approximation de nombres attachés à des fonctions au moyen de suites) et du discret au continu (emploi des ressources du calcul différentiel pour l'étude de suites). »

A cette époque on se contente des déclarations suivantes :

> « Il s'agit d'une première approche de cette notion, dont l'étude sera approfondie dans les classes de Terminale. » (Programme de Première)
>
> « Le programme d'analyse porte essentiellement sur les fonctions numériques, en relation avec l'étude de situations continues. […]. Quelques notions sur les suites complètent le programme d'analyse dans le seul but de permettre l'étude de situations discrètes sur des exemples simples. » (Programme de Terminale)

## IV.4 Equations et inéquations

La replacement du chapitre « Activités numériques » avec celle de « Activités numériques et algébrique » favorise le renforcement de la place de l'étude des équations par des techniques algébriques. En effet, alors qu'il n'est fait aucune allusion à l'étude d'équations dans la rubrique « Activités numériques », on explicite dans la nouvelle rubrique :

> « Poursuivre l'étude des équations et inéquations à une inconnue et des systèmes d'équations linéaires.
> […]
> La résolution de problème menant à des équations à une inconnue constitue un objectif important. Toute étude introduisant a priori des paramètres est exclue. La technique de résolution de l'équation du second degré est hors programme. »

Il ne s'agit pas de la résolution d'équations pour elle-même. L'étude des équations est toujours liée à la résolution de problèmes, issus de la géométrie, de l'étude des fonctions, de la gestion de données, des autres disciplines et de la vie courante et elle constitue l'une des phases du traitement d'un problème : mise en équation, résolution, contrôle et exploitation des résultats.

Ainsi l'étude des équations par des techniques algébriques a retrouvé une place plus favorable dans les programmes. Cependant le champ des équations abordées est assez restreint : l'étude d'équations composées de radicaux ou de valeurs absolues, d'équations trigonométriques (sauf $cosx = a$ et $sinx = a$), d'équations rationnelles, logarithmiques et exponentielles se trouve en dehors des objectifs du programme. Toute étude introduisant *a priori* des paramètres est exclue.

## IV.5 Utilisation de la calculatrice

La place des calculatrices est davantage affirmée. De plus, on parle désormais de calculatrices programmables comportant les fonctions statistiques et de l'exploitation des systèmes graphiques sur l'écran. Le programme de Seconde explique :

> « Dans les classes de lycée, l'emploi des calculatrices en mathématique a pour objectif, non seulement d'effectuer des calculs, mais aussi de contrôler des résultats, d'alimenter le travail de recherche et de favoriser une bonne approche de l'informatique. De plus, en analyse, cet usage permet d'accéder rapidement à des fonctions variées et à leur représentation graphique. »

La capacité de programmation, qui n'était exigée, à l'époque précédente, qu'à la fin de la Première, est mentionnée désormais dès la classe de Seconde et dans les classes suivantes. De plus, si dans les programmes précédents « savoir programmer » relevait de l'initiative du professeur ou était laissé à la charge de l'élève, maintenant l'objet programmation trouve place officiellement dans l'habitat « travaux pratiques » : On part d'« Exemples simples de programmation de valeurs d'une fonction » en Seconde, à la « Programmation de valeurs d'une fonction d'une variable » en Première et enfin à la « Programmation des termes d'une suite » en Terminale.

L'objet programmation s'intègre officiellement à deux organisations mathématiques au lycée : l'étude des fonctions et celle des suites. Il est sensé faciliter l'étude de ces derniers objets.

## IV.6 Place et rôle du registre graphique

Comme dans les programmes précédents, l'activité expérimentale est considérée comme étant tout à fait fondamentale dans l'activité mathématique. L'une des intentions majeures, présentées dans le programme de Seconde est que :

> « On a voulu entraîner les élèves à la pratique d'une démarche scientifique, en développant conjointement des capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique. »

De plus, les représentations graphiques conservent les mêmes niches que dans l'étape précédente. En particulier, elles doivent toujours permettre de diminuer les difficultés de manipulation algébrique dans l'étude des inégalités et des inéquations :

> « De nombreuses situations conduisent à des inégalités ou des inéquations. On se limitera à des exemples très simples et on s'appuiera sur des représentations graphiques et sur la variation des fonctions, afin d'éviter un formalisme purement algébrique. »

Les programmes de toutes les classes accroissent son importance en lui accordant une nouvelle rubrique intitulée « les représentations graphiques » où figure les objectifs et les capacités valables pour l'ensemble du programme :

> « Les représentations graphiques tiennent une place importante : en effet, outre leur intérêt propre, elles permettent de donner un contenu intuitif et concret aux objets mathématiques étudiés dans les différentes parties du programme ; leur mise en œuvre développe aussi les qualités de soin et de précision et met l'accent sur des réalisations combinant une compétence manuelle et une réflexion théorique…».

## IV.7 Tableau de valeurs et tableau de variations

Notons tout d'abord que ces deux objets ne sont pas mentionnés de façon explicite dans le programme de cette période. Par contre, la calculatrice programmable comportant les fonctions statistiques a été introduite, pour la première fois, en Seconde. Cet outil permet d'effectuer des calculs numériques et de programmer le calcul de valeurs numériques d'une fonction. Ainsi le statut du tableau de valeurs a complètement changé : Avant la calculatrice programmable et de la calculatrice graphique, on calculait quelques valeurs à la main ou éventuellement avec la calculatrice simple pour donner des points suffisamment représentatifs pour tracer la courbe d'une fonction. Mais on n'était pas dans une démarche de construction « automatique »d'un tableau de valeurs. Avec la calculatrice programmable, on peut avoir accès à cet objet. Il y a une fonction « tableau de valeurs » dans la calculatrice programmable, avec laquelle on détermine des choix, par exemple, le pas, la première valeur de la variable, on peut aussi choisir les valeurs de la variable comme on veut.

Si l'élève utilise cette fonction « tableau de valeurs », il est obligé de se poser un minimum de question sur ce qu'est un tableau de valeurs. Ainsi, tous les aspects techniques concernant le tableau de valeurs (faire des calculs, construire le tableau, …) se réduisent à appuyer sur la touche de « tableau de valeurs » de la calculatrice. Par contre cette fonction reste liée au graphique. En effet, les deux fonctions « tracé graphique » et « tableau de valeurs » se trouvent côte à côte dans la calculatrice.

Le tableau de valeurs reste principalement utilisé, comme dans les périodes précédentes, dans des contextes « concrets » pour passer au registre graphique (on estime les valeurs de la fonction qui n'apparaissent pas dans le tableau de valeur donné, en utilisant le principe d'interpolation linéaire). Cependant, dans cette période, on voit apparaître certains nouveaux types de tâches dans les manuels comme, par exemple, dans des rubriques intitulées « Tableau de valeurs d'une fonction et calculatrices » ou « Programmation d'une calculatrice » où on demande à l'élève de dresser un tableau de valeurs à l'aide d'une calculatrice. Notons quand même qu'on ne voit pas encore apparaître dans les manuels de cette époque de reproduction d'écran de calculatrices représentant un tableau de valeurs ou une représentation graphique. Cette pratique est tout à fait récente (cf. plus bas).

Dans la même période, l'utilisation du tableau de variations augmente par rapport aux périodes précédentes. Tout d'abord, notons que dans certains manuels il y a des paragraphes spécifiques, comme «Représentation graphique et tableau de variations », ainsi on insiste sur le fait qu'un tableau de variations peut correspondre à plusieurs courbes. C'est pourquoi la tâche « Tracer une, deux ou trois courbes à partir d'un tableau de variations » apparaît dans la plupart des manuels consultés. Notons que dans « Collection Spirale Math 2$^{e}$ (1990) », la tâche « Tracer une représentation graphique à partir d'un tableau de variations » est demandé toujours de la façon suivante : *« tracer une représentation graphique ne comportant que des segments de droites. »*.

Ensuite, on peut voir des exercices qui s'appuient exclusivement sur le registre tableau de variations. On donne un tableau de variations, à partir duquel on demande de répondre à certaines questions, par exemple, résoudre une inéquation, donner un encadrement, donner le minimum et le maximum, compléter les inégalités, etc. Ces types d'exercices n'apparaissaient pas dans les périodes précédents.

# V. Le nouveau programme de seconde – 2000

## V.1 Généralités

Comme précédemment, ce nouveau texte déclare conserver, pour l'essentiel, les objectifs du programme précédent mais l'apparition du « document d'accompagnement » donne une perspective nouvelle et plus riche sur certains points. Par ailleurs, ce programme s'inscrit dans la continuité de celui qui est mis en œuvre dans les classes de collège et appliqué dans les classes de troisième à compter de la rentrée 1999.

Il est composé de trois grands chapitres : « Statistique », « Calcul et fonctions », « Géométrie ». Dans le chapitre « Calcul et fonctions », le programme rassemble un bilan sur les ensembles de nombres, les problèmes de calcul numérique et algébrique et l'étude des fonctions. C'est une invitation à chaque enseignant pour qu'il construise son cours en faisant interagir ces divers éléments.

> « Le calcul numérique et le calcul algébrique ne doivent pas constituer un chapitre de révision systématique, mais se retrouvent au travers des différents chapitres. En particulier, ils seront traités en relation étroite avec l'étude des fonctions. Comme la géométrie, les activités de calcul doivent être l'occasion de développer le raisonnement et l'activité de démonstration. »

Le programme insiste tout de suite sur le lien étroit entre le calcul algébrique, l'étude des fonctions et l'activité de démonstration. Ici, le calcul algébrique apparaît comme un outil fonctionnel au service de l'étude des fonctions et des démonstrations, ce qui engage l'algèbre dans une nouvelle dimension.

Le premier objectif précisé sur l'étude des fonctions étant d'« expliciter, sous différents aspects (graphique, calcul, étude qualitative), la notion de fonction. », on constate ainsi un renforcement encore plus progressif de l'utilisation des divers modes de représentation des fonctions :

> « Pour chaque notion, le programme invite à repérer la multiplicité et la complémentarité des points de vue (graphique, numérique, algébrique, géométrique). Dans chaque chapitre, l'accent a été mis sur les activités faisant fonctionner les connaissances (thèmes y compris) et sur la résolution de problèmes » et
>
> « Le programme demande explicitement de traiter des exemples de fonctions données à l'aide d'une courbe (…) ainsi que celles fournies par un tableau de données. » (Commentaire du programme)

L'affirmation des liens avec les autres disciplines apparaît de façon encore plus centrale :

> « On étudiera des situations issues, entre autres, de la géométrie, de la physique, de l'actualité ou de problèmes historiques » (programme de Seconde)
>
> « […] On peut trouver de nombreux exemples de situations géométriques, faisant intervenir comme variable une longueur et comme deuxième grandeur une longueur ou une aire ; la question à traiter est alors souvent un problème de maximum, de minimum ou même de recherche d'une valeur particulière. » et « Le programme de physique demande que la notion de courbe sinusoïdale soit abordée : d'où la demande de représentation des fonctions sinus et cosinus. » (Commentaire du programme de Seconde)

D'autre part, le tableau de valeurs et le tableau de variations ont pris dans cette évolution une importance croissante et ont gagné en autonomie :

> « Identifier la variable et son ensemble de définition pour une fonction définie par une courbe, **un tableau de données** ou une formule »
> « Décrire, avec un vocabulaire adapté ou un tableau de variations, le comportement d'une fonction définie par une courbe. Dessiner une représentation graphique compatible avec **un tableau de variations** »[9]

Ainsi, pour la première fois, on demande de définir une fonction à partir d'un tableau de valeurs et on parle explicitement du passage d'un tableau de variations à une représentation graphique.

On précise, en commentaire, qu'on réfléchira sur les expressions *être fonction de* et *dépendre de* dans le langage courant et en mathématiques et qu'on donnera des exemples de dépendance non fonctionnelle (poids et taille, note au bac et moyenne de l'année). Ce programme offre aussi la possibilité de faire allusion aux fonctions définies sur un ensemble fini et aux fonctions à deux variables :

[9] C'est nous qui soulignons.

> « Les fonctions abordées ici sont généralement des fonctions numériques d'une variable réelle pour lesquelles l'ensemble de définition est donné. On pourra voir quelques exemples de fonctions définies sur un ensemble fini ou même de fonctions à deux variables (aire en fonction des dimensions) »

Pour l'étude du sens de variation et de la représentation graphique des fonctions, il ne dispose que les fonctions $x \to x^2$ et $x \to \frac{1}{x}$. D'autres fonctions, telles que $x \to \sqrt{x}$, $x \to x^3$, $x \to |x|$, etc., pourront être découvertes à l'occasion de problèmes mais ne sont pas exigibles par le programme. On se limite aussi, concernant les fonctions trigonométriques, à connaître la représentation graphique de cos x et de sin x.

Pour chaque chapitre, un ensemble de thèmes d'études est proposé. Ainsi on retrouve les thèmes d'études comme en 1980. On précise le statut de ces thèmes ainsi,

> « Ces thèmes, entourant le contenu du chapitre, permettent de faire vivre l'enseignement au-delà de l'évaluation sur les capacités attendues et de prendre en compte dans une certaine mesure l'hétérogénéité des classes. L'enseignant a toute liberté pour choisir les thèmes au-delà de ces propositions. »

Le programme présente 26 thèmes en total pour 3 chapitres différents dont 9 thèmes pour le chapitre « Calcul et fonctions ». On trouve des thèmes qui sont spécifiques à l'utilisation du registre graphique et du registre tableaux.

On voit donc des changements importants par rapport aux programmes précédents. On constate une tendance assez forte à une modification structurale importante dans l'enseignement des fonctions. C'est une domaine qui sert à modéliser beaucoup d'autre domaine extra mais aussi intra mathématiques.

Plusieurs modes de représentation de la fonction sont cités explicitement par le programme : Le registre algébrique n'est plus le seul mode d'entrée. On trouve dans les manuels de cette époque de nombreux exercices proposant un travail directement à partir de la représentation graphique et un usage plus riche à la fois des tableaux de valeurs et des tableaux de variations.

## V.2 Relation statistique et fonctions

L'étude de la statistique a pris une place encore plus importante, puisqu'elle représente une de trois chapitres du programme. De plus, ce nouveau programme place l'étude de statistique avant celle de fonctions, ce n'est pas le cas dans l'épisode précédent.

Comme la période précédente, l'étude de « lecture, interprétation et réalisation de tableaux et de graphiques » apparaît dès la classe de Sixième et de Cinquième.

## V.3 Relation suites et fonctions

Comme dans la période précédente, les suites sont absentes du programme de Seconde. A cette époque on se contente des déclarations suivantes :

> « Pour les suites, l'objectif principal est de familiariser les élèves avec la modélisation de phénomènes itératifs simples. » (Programme de Première)

En terminal, l'étude des suites, intitulé « Complément sur les suites », se trouve seulement dans l'enseignement spécialité avec la déclaration suivante ;

> « On gardera en terminale la démarche expérimentale adoptée en première pour les suites, en particulier pour aborder la notion de convergence. On évitera tout formalisme inutile, sans pour autant sacrifier la rigueur du raisonnement ; (…). On s'appuiera sur la calculatrice ou une représentation graphique adaptée pour conjecturer le comportement global ou asymptotique de chacune des suites étudiées. »

## V.4 Equations et inéquations

Pour l'étude des équations, on demande d'utiliser le point de vue des fonctions pour enrichir la réflexion sur la résolution de celle-ci. Il s'agit ici de combiner les apports des modes de résolution graphique et algébrique mais on fait plus d'allusion dans des différents lieux au registre graphique :

> « Résoudre graphiquement des équations ou inéquations du type $f(x) = k$ ; $f(x) < k$ ; $f(x) = g(x)$ ; $f(x) =< g(x)$… » et « On précisera les avantages et les limites de ces différents modes de résolution [algébrique et graphique]. On pourra utiliser les graphiques des fonctions de référence et leurs positions relatives. »

Comme la période précédente, le champ des équations abordées est assez restreint : il s'agit seulement de résoudre une équation ou une inéquation se ramenant au premier degré.

Dans le document d'accompagnement, on montre l'importance de l'utilisation du registre graphique dans l'étude des équations avec des exemples :

> « Un élève ayant à résoudre une équation comme $(x - 2)^2 = 9$ perçoit assez facilement que l'égalité est bien vérifiée pour $x = 5$ et il se contente alors de donner cette seule solution ; il a même souvent quelques réticences à mettre en œuvre toute technique permettant d'aboutir à l'ensemble des solutions. La représentation graphique de la fonction $x \rightarrow (x - 2)^2$ qui met bien en évidence l'existence de deux solutions incitera à dépasser le premier raisonnement. Pour la résolution de $x^2 + 2x + 3 = 0$, on peut là aussi s'appuyer sur la représentation graphique qui montre bien l'absence de solution, confirmée ensuite par $(x + 1)^2 + 2 = 0$ (…) »

## V.5 L'utilisation de calculatrice

L'utilisation de la calculatrice est encore renforcée en seconde puisqu'un de principal objectif du chapitre « Calcul et fonctions » est d' «utiliser de façon raisonnée et efficace la calculatrice pour les calculs et pour les graphiques. »

De plus, la calculatrice se trouve dans une nouvelle niche liée au registre algébrique dans l'étude des fonctions :

> «L'utilisation d'une calculatrice avec un éditeur d'expression (…) permet une approche quasiment expérimentale des modifications d'écriture possibles et des identités usuelles. (…) On exploitera les

> possibilités des calculatrices pour enrichir la réflexion sur les différentes formes possibles qu'une expression peut prendre et sur les questions auxquelles chacune de ces formes permet de répondre. » (Commentaire du programme)

Le programme précise, par contre, les limites et les inconvénients de cet outil dans l'étude des nombres et des fonctions :

> « (…) un élève doit avoir pris conscience qu'une calculatrice de type scientifique opère essentiellement sur un nombre fini de chiffre et que le plus suivent, elle ne donne qu'une valeur approchée décimale d'un résultat. » et
>
> « Il s'agit d'intégrer véritablement les calculatrices dans le cadre de mathématiques, d'en démystifier certains aspects et de mieux situer la spécificité de cet outil, tout en gardant à l'esprit qu'étant donné une valeur exacte, on peut guère souvent possible de dégager la valeur exacte d'un résultat approché. Calcul à la main et calcul à la machine seront traités parfois conjointement mais le plus souvent en complémentarité en mettant en avant les apports spécifiques et les limites de chacun. » (Commentaire du programme)

On précise aussi dans le programme que l'utilisation de calculatrice ou d'ordinateur amènera à considérer une fonction comme un dispositif capable de produire une valeur numérique quand on introduit un nombre (c'est-à-dire comme une « boîte noire »)

## V.6 Place et rôle du registre graphique

Comme nous l'avons dit ci-dessus, le registre graphique se trouve au centre dans l'étude du concept de fonction, puisqu'il est cité le premier dans différents lieux du programme comme les modes de représentation de fonction :

> « Identifier la variable et son ensemble de définition pour une fonction définie par une courbe, un tableau de donnée ou une formule. » et « Expliciter, sous différents aspects (graphique, calcul, étude qualitative), la notion de fonction. » (Programme de seconde)
>
> « Au sujet des fonctions, l'accent est mis sur les différents aspects sous lesquels apparaît la notion de fonction : graphiques, numériques, qualitatifs. Là encore, il est proposé d'insister sur les apports respectifs des différents cadres d'étude. » (Document d'accompagnement de seconde)

Le programme demande explicitement de traiter des exemples de fonctions données à l'aide d'une courbe en faisant allusion au fait que les courbes sont fréquentes dans les documents des autres disciplines ou dans les média.

A propos de fonction définie par une courbe, il importe que, selon le programme, les élèves sachent lire de façon critique l'information contenue dans la courbe (lectures approchées d'images et d'antécédents, ou lectures exactes dans certains cas précisés par le graphique, variations, etc.) ; on pourra convenir ici que l'information sur les variations est exhaustive et on montrera la nécessité d'une telle convention à l'aide de courbe tracées avec un grapheur à partir d'une formule.

## V.7. Tableau de valeurs et tableau de variations

Comme nous l'avons dit ci-dessus, le tableau de valeurs et le tableau de variations ont pris dans cette évolution une importance croissante et ont gagné en autonomie :

> « Identifier la variable et son ensemble de définition pour une fonction définie par une courbe, **un tableau de données** ou une formule »
> « Décrire, avec un vocabulaire adapté ou un tableau de variations, le comportement d'une fonction définie par une courbe. Dessiner une représentation graphique compatible avec **un tableau de variations** »[10]

Ainsi, pour la première fois, on demande de définir une fonction à partir d'un tableau de valeurs et on parle explicitement du passage d'un tableau de variations à une représentation graphique. D'ailleurs, c'est la première fois qu'on utilise explicitement le terme « tableau de variations » dans le programme, même si certains types de tâches lié à cet outil correspondaient déjà aux époques antérieures à une pratique effective. On envisage aussi des tâches où le registre d'entrée pourrait être le tableau de variations, ce qui est nouveau.

On trouve également des thèmes liés au tableau de valeurs et au tableau de variations :

> « Fonction affine par morceaux conforme à un tableau de variations ou un tableau de valeurs et problèmes d'interpolation linéaire. »
> « A l'aide d'un traceur de courbes, ajustement fonctionnel d'un tableau de valeurs (issues du champ de la physique, de l'économie… ou reprise d'un problème important dans l'histoire des sciences). (…) »

Afin de compléter cette étude des programmes, nous allons rapidement donner un aperçu de l'évolution de l'enseignement des fonctions dans les classes de Troisième dans la même période.

# VI. Synthèse

Avant de conclure, nous proposons ci-dessous, dans un tableau synthétique, les choix de transposition pour organiser l'étude du concept de fonction depuis 1980 ainsi que l'évolution de certains chapitres qui semblent entretenir un rapport important avec cet étude, et qui peuvent influencer ou renforcer l'utilisation de certains modes de représentation pour la fonction.

[10] C'est nous qui soulignons.

| | 1980 - 1985 | 1986 - 1989 | 1990 - 1999 | 2000 - |
|---|---|---|---|---|
| **Généralité du programme en 2nde** | - Réduit la théorisation et la formalisation<br>- Finalité : résolution de problème et activité des élèves | - l'importance de l'activité expérimentale<br>- Etude locale d'une fonction est repoussé en 1ère<br>- La variété des registres et le lien avec d'autres disciplines sont accentués<br>- Suppression l'étude des fonctions polynômes de degré deux et des fonctions homographiques<br>- Diminution de l'étude des fonctions en 3ème | -La variété des registres et les lien avec d'autre disciplines<br>- Diminution de l'étude des fonctions références en 2nde et en 3ème | - Affirmation des liens avec d'autres disciplines est centrale<br>- Tous les registres sont cités<br>- Diminution de l'étude des fonctions références |
| **L'évolution des autres chapitres** | - Apparition des statistiques : « lecture de tableaux, analyse des graphiques »<br>- Les suites sont supprimées en 2nde<br>- le lien équation - fonction est précisé | - L'enseignement des statistiques est encore développé<br>Le lien équation – fonction est renforcé | - Apparition des statistiques en 3ème : « lecture, interprétation et réalisation de tableaux et de graphiques »<br>- les statistiques encore développés<br>- Diminution du champ des équations | - Les statistiques sont l'un de trois grands chapitres<br>- Le mode de résolution graphique est renforcé pour l'étude des équations |
| **Calculatrice** | - Définition d'une fonction avec « touches de la calculatrice » | Introduction de la calculatrice programmable en 1ère | Introduction de la calculatrice programmable en 2nde : « Exemple simples de programmation de valeurs d'une fonction » | Son utilisation est renforcée : « utiliser de façon raisonnée et efficace la calculatrice… » |
| **Evolution des registres graphique et tableaux** | Graphique :<br>nouvelles niches ;<br>permettre une démarche expérimentale (analyse des graphiques, conjecturer à partir d'études graphiques)<br>Tableau de valeurs : appelé « tableaux de données numériques »<br>Tableau de variations : n'est pas cité | Graphique : nouvelles niches ; expérimentation graphique et expérimentation numérique, donner du sens aux équations, …<br>Tableau de valeurs : appelé « tableaux de donnée »<br>Tableau de variations : n'est toujours pas cité | Graphique : une nouvelle rubrique apparaît « les représentations graphiques », permettre de diminuer les difficultés de manipulation algébrique.<br>Les tableaux de valeurs et de variations ne sont pas mentionnés de façon explicite | Graphique : registre central et cité toujours premier comme mode de représentation,<br>Les tableaux de valeurs et de variations, et des tâches liés à ces outils sont cités explicitement. |

# CONCLUSION

L'étude des différents programmes depuis 1980 nous a permis de voir les nombreuses façons possibles de représenter les fonctions en mathématiques et les variations dans la représentativité de ces différentes représentations, dont témoignent les programmes successifs.

*Dans la période 1980-1985*, la contre- réforme réduit la théorisation et la formalisation au strict nécessaire. De fait, on sent bien une volonté de sortir du tout algébrique : La fonction pourrait être définie, à côté d'une formule explicite, par des tableaux de données numériques, des touches de la calculatrice ainsi que par des graphiques. De plus, les représentations graphiques occupent désormais une nouvelle niche : *permettre une démarche expérimentale.* Cette niche marque un changement radical du rôle des représentations graphiques par rapport à l'époque précédente. En effet, alors que dans les années 1970 le graphique venait après les résultats théoriques, il peut désormais apparaître comme registre d'entrée.

Les statistiques introduites pour la première fois en Seconde dans cette période, sont un lieu où la « lecture de tableaux » et l'« analyse des graphiques » sont propres à modifier certaines des tâches relatives aux fonctions. Il apparaît ainsi que ce chapitre nourrit et renforce l'utilisation du tableau de valeurs et de la représentation graphique.

*Dans la période 1986-1989*, les outils de l'étude locale d'une fonction et des équations du second degré ont disparu de la classe de Seconde. On assiste ainsi à une baisse de l'appareillage théorique sur les fonctions. L'activité expérimentale est davantage mise en avant ce qui se manifeste, entre autres, dans la place plus importante octroyée aux représentations graphiques et au tableau de valeurs : Les nouvelles niches « expérimentation graphique » et « expérimentation numérique » apparaissent ainsi pour la première fois. Le registre graphique a également pour le rôle de permettre de donner du sens aux inégalités et aux inéquations, et de diminuer les difficultés de la manipulation algébrique.

D'autre part, les programmes ont essayé de donner un ancrage plus fort des fonctions avec des domaines extra mathématiques. Les statistiques qui apparaissent pour la première fois dans la période précédente, ont encore pris une place plus importante. Ces deux dernières évolutions ont donné une importance croissante aux registres graphique et des tableaux de valeurs.

*Dans la période 1990-1999*, on constate des changements importants par rapport au programme précédent qui accentuent encore les changements déjà amorcés. La volonté ambitieuse des premiers programmes de la contre-réforme, de donner les outils théoriques de cette étude, à travers l'étude du comportement local des fonctions, est ici définitivement abandonnée. La représentation graphique prend une place encore plus grande et elle doit toujours permettre de diminuer les difficultés de manipulation algébrique.

Dans la même période, l'enseignement de l'algèbre au collège a subi un net recul, de fait, le registre de représentation algébrique des fonctions a commencé à perdre de sa prédominance en seconde. Le programme contemporain de Troisième développe également un enseignement des statistiques, pour la première fois, qui couvre tout l'ancien programme de statistique de

Seconde, et comprend entre autres, « lecture, interprétation et réalisation de tableaux et de graphiques ».

La calculatrice programmable est également introduite pour la première fois en Seconde pour l'étude des fonctions. Ainsi le statut de tableau de valeurs est complètement changé : on peut avoir facilement accès à cet objet  à partir d'une touche « tableau de valeurs ».

*A partir du programme 2000*, on constate une tendance assez forte à une modification structurale importante dans l'enseignement des fonctions. Plusieurs modes de représentation de la fonction sont cités explicitement par le programme : Le registre algébrique n'est plus le seul mode d'entrée. On trouve dans les manuels de cette époque de nombreux exercices proposant un travail directement à partir de la représentation graphique et un usage plus riche à la fois des tableaux de valeurs et des tableaux de variations.

Les statistiques ont pris une place croissante et dans le nouveau programme de 2000, elles constituent à elles seules, un de trois grandes parties du programme.

Dans le même temps, les connaissances algébriques des élèves entrant en seconde ayant diminué, le registre algébrique n'est plus en mesure de jouer un rôle central. En effet, le bestiaire des expressions algébriques connus des élèves s'est peu à peu réduit aux fonctions affines et du second degré, à la fonction racine carré, la fonction inverse et les fonctions cosinus et sinus.

Maintenant que nous avons resitué les grandes tendances du programme actuel dans une évolution couvrant les vingt dernières années, nous allons voir comment ce programme est mis en œuvre, en commençant par une analyse détaillée, en termes de praxéologies didactiques, de certains manuels récents.

# CHAPITRE B2

# Analyse écologique de manuels actuels (édition 2000) de Seconde concernant les nouveaux programmes 2000

## I. Introduction

L'analyse écologique de l'évolution des programmes depuis 1980 menée dans le chapitre précédent nous a permis d'identifier les grandes tendances du programme actuel (2000) dans une évolution couvrant les vingt dernières années. Ainsi, nous avons constaté une tendance assez forte à une modification structurale importante dans l'enseignement des fonctions. Notamment, plusieurs modes de représentation de la fonction sont cités explicitement par le programme et on incite les professeurs à les utiliser. Par ailleurs, cette étude nous a permis de mieux comprendre le rôle des tableaux de valeurs et de variations dans l'écologie actuelle définie par les programmes les plus récents.

Il nous faut maintenant analyser comment ces grandes tendances du programme actuel sont mises en œuvre par les auteurs des manuels. En effet, pour étudier le processus de transposition didactique interne et dans l'optique de comprendre les choix faits par les enseignants au niveau du savoir enseigné, il est nécessaire d'analyser les manuels auxquels la plupart d'entre eux se réfèrent pour construire leurs cours.

Nous considérons donc les manuels scolaires comme un des produits de la première étape de la transpostions didactique interne. Ils sont le résultat des choix faits par leurs auteurs sur le savoir à enseigner, c'est-à-dire, selon les termes de Ravel (2003), le résultat d'un certain 'apprêtage didactique'. Dans cette étape, le jeu des conditions et des contraintes institutionnelles, où les auteurs de manuels gardent une certaine marge de manœuvre, conduit à une certaine interprétation des termes du programme. Des choix sont déjà faits à ce niveau.

Nous chercherons alors à répondre aux questions suivantes : comment sont mises en place les nouveautés du programme 2000 de Seconde dans les différents manuels ? Quel est *l'écart* entre les intentions des programmes et l'application de ces intentions dans les manuels ? Quelles libertés ont pris les auteurs de manuels par rapport aux contraintes institutionnelles ?

Dans ce chapitre, nous allons nous attacher plus particulièrement à l'utilisation du tableau de valeurs et du tableau de variations. En effet, l'analyse écologique des programmes menée dans le chapitre précédent a montré que ces deux outils ont pris une importance croissante dans cette évolution et ont gagné en autonomie.

## I.1 Organisation de l'analyse des manuels

Notre analyse des manuels comporte deux volets :

Dans le premier volet, nous analysons la partie « cours » des manuels (activités, cours, méthodes, exercices résolus, …) qui sont liés à l'étude des fonctions pour voir comment sont mises en place les tendances de programme (2000) de seconde au niveau des registres de représentation sémiotique, surtout comment le tableau de valeurs et le tableau de variations sont introduits et quelles connaissances sont données. Pour ce premier volet, nous exclurons le chapitre « Fonctions de référence ». Puisque, dans ce chapitre, il s'agit seulement de l'étude des fonctions de référence et le tableau de valeurs et de variations n'apparaissent que comme un outil, soit entre le registre algébrique et le registre graphique, soit comme un résumé de l'étude du sens de variations. Il n'y a donc pas de tâche spécifique pour ces objets dans ce chapitre.

Dans le deuxième volet, il s'agit d'analyser tous les exercices qui se trouvent dans les chapitres liés à l'étude des fonctions (y compris ceux du chapitre « Fonctions de référence »). Ici, nous prendrons en compte les exercices dans lesquels le tableau de valeurs et le tableau de variations apparaissent explicitement en tant qu'un registre d'entrée ou en tant que tâche intermédiaire.

### I.1.1 Liste des types de tâches relatives aux tableaux de valeurs et de variations

Avant de commencer notre analyse des manuels, nous détaillons les types de tâches possibles concernant le tableau de valeurs et de variations. Notons que nous proposons à l'annexe C une analyse praxéologique relativement complète de tous les types de tâches relatifs à l'introduction de la notion de fonctions.

Un type de tâche correspond à une question que nous avons jugée emblématique sur la notion de fonction. Chacune de ces tâches peut effectivement apparaître en tant que question unique d'un exercice ou, au contraire, être associée à d'autres tâches dans un exercice ou un problème.

Nous distinguerons quatre grands groupes de tâches concernant les tableaux de valeurs et de variations :

***1. Les tâches de traitement liées au tableau de valeurs***

A partir d'un tableau de valeurs, on peut demander, sans passer a priori à un autre registre les types de tâches suivants :

- Reconnaître si un tableau de valeurs définit ou non une fonction (discrimination relation/fonction)

La technique est de s'assurer qu'il n'y a pas, dans la première ligne du tableau, de valeur reproduite deux fois ou, au contraire de relever une telle valeur ainsi que ses images distinctes.

- Compléter un tableau de valeurs selon la nature de la fonction (paire, impaire, etc.)

***2. Les tâches de conversion liées au tableau de valeurs***

- *A partir d'une expression algébrique, construire un tableau de valeurs (A $\rightarrow$ Tvl)*

C'est une tâche très classique et connue depuis le collège. Cette tâche apparaît en général comme sous-tâche dans le passage du registre algébrique au registre graphique. Il s'agit en effet de calculer l'image d'un élément en remplaçant la variable x par l'élément dans l'expression de la fonction : c'est un calcul direct. Ce calcul peut se faire soit manuellement (avec ou sans l'aide d'une calculatrice), soit après programmation de la fonction.

*Une variante consiste, à partir d'une expression algébrique, à faire compléter un tableau de valeurs.*

Dans ce cas, on donne un tableau de valeurs dans lequel certaines cases sont laissées vides. On peut alors voir deux types de formulation :

- Seules les valeurs de la variable peuvent être indiquées dans le tableau donné.

Dans ce cas, la tâche est une variante du type de tâche précédent « construire un tableau de valeurs », la seule différence est qu'on donne peu d'initiative à l'élève, c'est-à-dire qu'on impose dès le début les valeurs de la variable, le pas, etc.

- Certaines valeurs de la variable et des images par la fonction apparaissent dans le tableau de valeurs donné.

Dans ce cas, il faut trouver images et antécédents. Il est clair que ces deux tâches représentent un niveau de difficulté très différent pour l'élève : dans un cas, il suffit de faire un calcul direct, alors que, dans l'autre, il faut résoudre une équation. De plus, une valeur peut avoir deux ou même plusieurs antécédents selon l'expression algébrique de la fonction. Dans ce cas, on peut se demander comment l'élève va réagir quant au choix de l'antécédent et quel sera son critère. Il se peut aussi qu'il n'y ait pas d'antécédent.

- *Trouver l'expression algébrique d'une fonction dont on connaît un tableau de valeurs (Tvl $\rightarrow$ A)*

Pour réaliser cette conversion, le type de fonction doit être connu et explicité. De fait, ce type de tâche en seconde, ne peut concerner que les fonctions affines et c'est alors une tâche qui a déjà été vue en troisième avec l'étude des fonctions affines.

- *A partir d'une courbe, construire un tableau de valeurs (G $\rightarrow$ Tvl)*

C'est une tâche qui a déjà été vue en troisième avec l'étude des fonctions affines. Il s'agit en effet de déterminer l'image des éléments par la lecture graphique.

Pour trouver l'image d'une valeur (a), on trace une parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point (a ; 0) puis on repère l'ordonnée de l'unique point d'intersection de cette droite avec la courbe.

*Une variante consiste, à partir d'une courbe, à faire compléter un tableau de valeurs.*

Si certaines valeurs de la variable et des images par la fonction apparaissent dans le tableau de valeurs donné, il s'agit, dans ce cas, de déterminer image et antécédent par la lecture graphique. Ici, les deux types de tâche ne sont guère différents. Dans la lecture graphique, la recherche d'images ou d'antécédents correspond à des niveaux de difficulté assez semblables, si ce n'est que pour l'antécédent on n'est assuré ni de l'existence, ni de l'unicité.

*Une autre variante consiste à donner un ensemble de courbes et un ensemble de tableaux de valeurs et à demander des les regrouper par paires.*

Ici, il s'agit de trouver des critères pour organiser la réponse. Une difficulté vient de ce que plusieurs courbes peuvent correspondre au même tableau, voire même plusieurs tableaux peuvent correspondre à la même courbe et donc plusieurs tableaux peuvent correspondre à plusieurs courbes.

- *Tracer une courbe à partir d'un tableau de valeurs (Tvl $\to$ G)*

Comme nous l'avons déjà dit, le tableau de valeurs est une représentation partielle de la correspondance entre la variable et son image. A un même tableau de valeurs peuvent donc correspondre plusieurs fonctions et donc plusieurs représentations graphiques, puisque rien ne détermine ce qui se passe entre les valeurs choisies de la variable.

Pour tracer une représentation graphique, on place les points du tableau dans un repère puis on les lie comme on veut en respectant la définition d'une fonction. Toutefois, la tendance naturelle est de « compléter » entre les valeurs données par le comportement le plus lisse. Par exemple, on fait un tracé d'une courbe point par point soit en joignant ces points par des segments de droite soit en « lissant » au mieux. Il est clair qu'il faut pouvoir dépasser la vision point par point du tableau de valeurs pour atteindre la notion de fonction d'une variable qui varie continûment.

Comprendre qu'à un même tableau de valeurs peuvent correspondre une infinité de fonctions (et donc de courbes) sera un enjeu important de notre travail qui aura à lutter contre le penchant naturel du tracé point par point.

- *A partir d'un tableau de valeurs, établir un tableau de variations (Tvl $\to$ Tvr)*

Ici, la réponse n'est jamais unique, il s'agit donc de donner une (ou plusieurs) réponse(s) compatible avec le tableau de valeurs donné. Pour donner un tableau de variations, il suffit de compléter le tableau avec des flèches signifiant le sens de variation de la fonction. Pour construire deux (ou plusieurs) tableaux distincts, il est indispensable d'intercaler de nouvelles valeurs, pour chaque nouveau tableau, de façon à modifier la monotonie sur au moins un intervalle.

***3. Les tâches de traitement liées au tableau de variations***

Le tableau de variations comporte des informations, codifiée dans un style compact, qui se décode par une lecture visuelle. Il permet ainsi de déterminer ;

- l'ensemble de définition de la fonction,
- la lecture d'images et d'antécédents (pour les bornes et les extrema),
- la lecture de certaines limites (infinies) de la fonction,
- les variations et des extrema de la fonction,
- un encadrement pour l'image d'une valeur qui n'apparaît pas dans le tableau,
- la comparaison des images de deux valeurs,
- Outre ces tâches de premier niveau, on peut demander de :
- Repérer des erreurs dans un tableau de variations,
- Donner le tableau de variations d'une fonction construite à partir d'une autre fonction dont on connaît le tableau de variations.

### *4. Les tâches de conversion liées au tableau de variations*

- *A partir d'une expression algébrique, établir le tableau de variations (A$\rightarrow$ Tvr)*

La réalisation de cette tâche nécessite comme première sous-tâche, de déterminer les variations de la fonction. Pour ce faire, deux techniques sont disponibles au niveau de Seconde :

- *technique des inégalités* : Pour montrer qu'une fonction est monotone sur un intervalle, la technique repose sur la définition suivante (technologie) : « une fonction est croissante (respectivement décroissante) sur un intervalle I, si pour tous réels a, b appartenant à I tel que a $\leq$ b, alors f(a) $\leq$ f(b) (respectivement f(a) $\geq$ f(b)) ». Il faut, dans un premier temps, choisir convenablement les intervalles où on a perçu que la fonction est monotone. Puis déterminer, sur chacun d'eux, dans un deuxième temps, l'ordre de f(a) et f(b) ayant supposé a inférieur à b, ce qui constitue un traitement algébrique possible, ou le signe de f(b) – f(a) relativement au signe de b – a, ce qui constitue un autre traitement algébrique.

- *technique des opérations* : la résolution de la tâche de détermination des variations d'une fonction selon cette deuxième technique consiste à les déduire, en remarquant que la fonction concernée peut être décomposée en opérations algébriques simples de fonctions, en fonctions composées, ou encore par transformations géométriques à partir de fonctions dont on connaît déjà les variations, par application des théorèmes sur les variations de la fonction résultante. Ainsi, il suffit pour déterminer les intervalles de monotonie d'une fonction selon cette deuxième technique, de montrer que la fonction à étudier résulte de telle opération de fonctions, entre telles fonctions déjà connues ou, de telle transformation géométrique de telle fonction, afin de pouvoir conclure immédiatement sur ses variations en appliquant le théorème correspondant. La technologie porte davantage sur les variations de fonction et la technique davantage sur les opérations de fonctions.

Cette méthode a l'avantage d'être très rapide et d'éviter un travail trop algébrique au profit d'un travail plus fonctionnel au moins pour ce qui concerne les variations d'une fonction.

La deuxième sous-tâche consiste en la réalisation du tableau de variations proprement dit. Ce tableau résume en fait l'étude des variations de la fonction et celle de la détermination de ses extrema.

- *Trouver l'expression algébrique d'une fonction dont on connaît le tableau de variations (Tvr $\rightarrow$ A)*

Ce type de tâche a une existence théorique. En pratique, elle a très peu de chance d'apparaître.

- *A partir d'une courbe, établir le tableau de variations (G $\rightarrow$ Tvr)*

Pour réaliser cette tâche, on lit graphiquement les intervalles sur lesquels la fonction est monotone puis on construit à partir des valeurs de ces intervalles le tableau de variations en précisant avec des flèches le sens de variations de la fonction.Il s'agit de repérer graphiquement les changements de variations, ou les extrema, et de lire sur le graphe les coordonnées des extrema. Il faut ensuite savoir organiser ces éléments correctement dans un tableau de variations.

- *Tracer une courbe à partir d'un tableau de variations (Tvr $\rightarrow$ G)*

Comme nous l'avons dit, plusieurs fonctions peuvent correspondre à un même tableau de variations. On peut donc tracer plusieurs courbes à partir d'un même tableau de variations. Pour cela, on place les points (qui apparaissent dans le tableau de variations) dans un repère puis on les relie en respectant le sens de variation de la fonction. Ici il y a toutefois moins de variabilité qu'avec un tableau de valeurs. Il peut donc être plus difficile de réaliser que plusieurs courbes peuvent correspondre à un même tableau. Par ailleurs, contrairement au tableau de valeurs, à une courbe donnée ne peut correspondre qu'un seul tableau de variations. On peut avoir ici les mêmes variantes que plus haut avec les tableaux de valeurs.

- *A partir d'un tableau de variations, établir un tableau de valeurs (Tvr $\rightarrow$ Tvl)*

Comme nous l'avons dit, nous précisons tout d'abord que plusieurs fonctions peuvent correspondre à un même tableau de variations et donc plusieurs tableaux de valeurs.

La technique ici consiste à repérer les valeurs données dans le tableau de variations et ces valeurs seraient suffisantes pour construire un seul tableau de valeurs. Par contre, si on demande de donner deux ou plusieurs tableaux de valeurs distincts, on est obligé de faire intervenir des valeurs pour des points intermédiaires en respectant les contraintes de variation de la fonction.

Nous avons ainsi déterminé a priori un certain découpage en types de tâches, nous allons maintenant repérer ces types de tâches dans quatre manuels de seconde édition 2000.

### I.1.2 Choix de manuels

Pour des questions de faisabilité nous ne pouvions étudier tous les manuels de seconde. Il a donc fallu faire un choix. Sur la base d'une enquête informelle, nous avons arrêté notre choix sur les quatre manuels suivants, qui semblent parmi les plus utilisés par les enseignants.

- Fractale maths 2$^{nde}$
- Hyperbole maths 2$^{nde}$
- Pythagore maths 2$^{nde}$
- Déclic maths 2$^{nde}$

# II. Premier volet : Etude de la partie « cours » des manuels (activités, cours, méthodes et exercices résolus…)

## II.1 Fractale maths 2$^{nde}$

Ce manuel présente quinze chapitres dont trois portent sur l'étude des fonctions :

- Généralités sur les fonctions
- Etude des variations d'une fonction
- Les fonctions de référence

Chaque chapitre est construit de façon similaire et composé en général de cinq parties : Activité, Cours, Méthodes et exercice résolus, Modules et Exercices.

### II.1.1 Chapitre : Généralités sur les fonctions

***Les activités***

Avant de passer aux activités proprement dites on donne des explications sur ce que les élèves vont découvrir en seconde.

> A découvrir en seconde :
> - identifier la variable et son ensemble de définition
> - définir une fonction par une courbe, un tableau de valeurs ou une formule
> - déterminer image et antécédent

Nous voyons à travers ces notions que les registres graphiques, tableaux de valeurs et algébriques pour définir la fonction vont être utilisés.

Il y a cinq activités introductives qui intitulent ainsi :

**La première activité** s'intitule : "Les représentation graphiques des fonctions affines ".

Elle consiste, entre autres, à faire fonctionner le passage du registre algébrique au registre graphique et vice-versa en lien avec les types de tâche : “ calculer les images ” et “ trouver les antécédents ”.

Dans la première partie**,** on donne une fonction affine avec sa formule ($f(x) = 2x – 3$) et on demande de calculer f(-3) et f(4) puis de tracer la représentation graphique de f. Ensuite, on demande de déterminer graphiquement et par le calcul les nombres x tels que : $f(x) = -4$, puis tels que : $f(x) \geq -4$. On voit donc ici qu'en s 'appuyant sur des connaissances de troisième, les auteurs commencent à introduire des tâches classiques liées aux fonctions, concernant la recherche par le calcul et graphiquement des images et des antécédents.

Dans la deuxième partie de cette activité, on donne un dessins représentant dans un repère, le tracé de cinq droites, dont une est horizontale et une verticale et on demande lesquelles sont des représentations graphiques de fonctions affines. Dans les cas affirmatifs (tous sauf la droite verticale), on demande en plus de donner l'expression de ces fonctions. Ceci correspond à la tâche inverse de celle de la première partie et, comme elle, fait partie des compétences normalement acquises en classe de troisième.

Cette première activité permet donc d'installer, dans le cadre connu des droites et des fonctions affines, les premières notions et tâches élémentaires sur la fonction, en particulier dans les liens entre les cadres graphiques et algébriques.

**La deuxième activité** s'intitule : “ D'autres représentations graphiques ”.

Ici la fonction est donnée algébriquement ($h(x) = 1/2x^2 - 3$ définie sur l'intervalle [-4 ; 4]) et on donne un tableau comme ci-dessous :

| ***x*** | -4 | -3,5 | -3 | -2,5 | -2 | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***h(x)*** | | | | | | | | | |

| ***x*** | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***h(x)*** | | | | | | | | |

Ensuite on demande de compléter ce tableau et de placer, dans un repère, les points trouvés. A la fin, on demande : *'quelles remarques peut-on faire sur la disposition de ces points ?'*. (On n'attend de l'élève qu'il dise qu'ils ne sont pas alignés !)

Le but de cette activité est donc de montrer qu'il y a d'autres représentations graphiques que des droites. Ici nous pouvons voir que le registre d'entrée est le registre tableau : il faut remplir un tableau de valeurs et placer les points trouvés et constater qu'ils ne sont pas alignés. On utilise l'intervalle symétrique par rapport à l'origine [-4 ; 4] et un pas de 0,5.

**La troisième activité** s'intitule : “ Des fonctions dans la vie de tous les jours ”.

Il s'agit de l'étude du prix de la course en taxi en fonction de la distance parcourue. Le but de cette activité est de montrer que les fonctions peuvent être représentées en langue naturelle en référence à un problème de la vie quotidienne. Donc le registre d'entrée est celui de la langue naturelle et se situe dans un contexte “ dans la vie de tous les jours ”.

Dans la deuxième partie de cette activité, on donne un tableau de valeurs qui indique le nombre d’ordinateurs connectés à Internet en fonction de dates particulières. Ensuite on demande de représenter graphiquement ces données. C’est une activité de conversion de registre, on passe du registre tableau au registre graphique. Elle a un lien avec la première partie, en effet ici aussi, on part d'un exemple de la vie tous les jours.

**La quatrième activité** s’intitule : “ Des fonctions en géométrie ”.

Elle est découpée en trois parties. Dans les deux premières on fait remplir à l’élève un tableau de valeurs permettant de mettre en correspondance le périmètre et l’aire d’un carré dans le premier cas et d’un disque dans le second. Chacune des deux se termine par la question “ exprimer l’aire … en fonction de la longueur … du périmètre ”.

Dans le troisième cas, on fait voir à l’élève que ceci n’est pas possible dans le cas d’un rectangle, puisqu’il existe des rectangles de même périmètre ayant des aires différentes.

Le but de cette activité est de voir que certaines formules de mesure en géométrie peuvent conduire à des relations fonctionnelles, mais que ce n’est pas toujours le cas. Le troisième cas peut aussi déboucher sur l’introduction à l’idée de fonction de plusieurs variables, en effet, l’aire du rectangle est fonction de la longueur des deux côtés.

**La cinquième activité** s’intitule : “ Des fonctions définies par une calculatrice”.

L’idée ici est d’utiliser la calculatrice comme une “ boîte noire ” qui permet d’associer un nombre à un autre nombre. Dans la première partie on utilise la touche “ log ” de la calculatrice en précisant qu’elle fait référence à une fonction qui sera étudiée en Terminale. Dans la seconde partie, on fait un programme de calcul qui conduit à la fonction $f(x) = \sqrt{x+3} + 1/x + 3$

Dans les deux cas, on donne un tableau de valeurs avec seulement les valeurs de la variable x et on demande de le remplir. Les élèves sont donc mis dans une situation exploratoire avec la calculatrice qui joue le rôle de “ boîte noire ”.

En résumé, l’ensemble de ces activités a pour but de montrer la variété des modes d’intervention et de représentation des fonctions en liaison avec des domaines déjà connus des élèves, que ce soit des connaissances mathématiques des années antérieures (activités 1, 2 et 4) des connaissances liées à des objets de la classe de mathématiques (la calculatrice dans l’activité 5) ou des connaissances de la “ vie de tous les jours ” (activité 3). C’est aussi l’occasion de faire travailler les premières notions et les tâches. En particulier, on remarque que le tableau de valeurs apparaît dans quatre d’entre elles comme registre d’entrée, ce qui montre que les auteurs ont choisi d’introduire cet objet de façon importante.

***Le cours***

Dans cette partie on donne trois définition : fonction, courbe représentative et tableau de valeurs.

La définition d’une fonction est expliqué à partir d’un exemple qui s’inscrit dans le registre algébrique (*$f(x) = x^2 - 2x$*). On montre l'ensemble de définition, l'image et l'antécédent avec cet exemple et à la fin, on donne une conséquence à propos de l'ensemble de définition ; "*Quand une fonction f est donnée par une formule, l'ensemble de définition de f est l'ensemble des nombres x dont l'image f(x) peut être calculée par cette formule.*"

La deuxième définition est celle de courbe représentative de la fonction : “ On appelle courbe représentative (ou représentation graphique) de la fonction f l’ensemble des points M, de coordonnées (x ; f(x)), où x parcourt l’ensemble E. ”. On donne deux explications sur le même graphique d'une fonction qui n'est pas affine : une pour l’antécédent et une pour l’image. On montre sur le graphique comment on peut localiser les images et les antécédents.

La troisième définition est celle de tableau de valeurs : “ Un tableau de valeurs pour une fonction f montre la correspondance entre des valeurs de la variable x et les valeurs de son image f(x). ”

On donne juste après cette définition l’explication suivante :

> “ Pour construire un tel tableau, on peut :
>
> - Choisir des valeurs quelconques de la variable dans l’ensemble de définition ;
>
> - Choisir un “ pas ”, c’est-à-dire un écart régulier entre deux valeurs successives de la variable. ”

Nous avons constaté que c’est un des rares manuels qui donne une définition du tableau de valeurs. On donne ensuite un exemple pour illustre cette définition. Voici cet exemple :

> « Soit *f* la fonction définie sur l’intervalle [-5 ; 4] par $f(x) = 1/4x^2 - 2x + 1$. On donne un tableau de valeurs de la fonction *f*, avec un « pas » de 1.

| ***x*** | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***f(x)*** | 69/4 | 13 | 37/4 | 6 | 13/4 | 1 | -3/4 | -2 | -11/4 | -3 |

Ainsi on donne un modèle de tableau avec 10 valeurs qui sont toutes entières, en choisissant un pas régulier de “ 1 ”, sur l’intervalle [-5 ; 4] qui n’est pas symétrique par rapport à l’origine et enfin avec les valeurs données sont dans un ordre de croissant.

Ensuite, dans le rubrique "**Zoom sur le cours**", on donne, des explications supplémentaires sur les notions introduites précédemment. Ce sont soit des techniques :

- Quand on a une représentation graphique, comment peut-on savoir si elle c'est bien celle d’une fonction : “ toute parallèle à l’axe des ordonnées coupe la courbe en un seul point ” en expliquant sur deux courbes dont l’une est celle d’une fonction et l’autre ne l’est pas.

Soit des explications supplémentaires sur la lecture de coordonnées exactes et sur ce qu’est un tableau de valeurs. Voici les explications sur le tableau de valeurs :

« Un tableau de valeurs ne donne que **quelques informations** sur une fonction.

- Le tableau de valeurs ci-contre (on donne un tableau de valeurs reproduit par l'écran de calculatrices et les valeurs de variable étant -3, -2, -1, 0, 1, 2 et 3) ne permet pas de dire que l'ensemble de définition de la fonction est [-3 ; 3] : on ne sait pas si les nombres de cet intervalle, qui ne sont pas des entiers, ont une image.
- A un même tableau de valeurs peuvent donc correspondre plusieurs fonctions, soit plusieurs représentations graphiques différentes. »

A partir de ces explications, on donne deux courbes qui correspondent au même tableau de valeurs en disant « deux courbes possibles pour ce même tableau de valeurs ». On voit ici que la conversion d'un tableau de valeurs à une représentation graphique est bien explicitée avec des connaissances nécessaires.

***Méthodes et exercices résolus***

Cette partie comporte trois rubriques, qui correspondent à trois types de tâches. Dans chaque rubrique on énonce le type de tâche de façon générale, puis on donne un exemple avec le corrigé qui donne la technique à employer, puis on termine par une application, c'est-à-dire un exercice laissé à la charge de l'élève où il doit reproduire la technique.

Les trois tâches sont, dans l'ordre, les suivantes :

- Déterminer image et antécédents à partir de l'expression d'une fonction *f*
- Déterminer image et antécédents à partir de la représentation graphique d'une fonction
- Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction définie par une formule

Le tableau de valeurs apparaît encore une fois comme un outil de contrôle dans l'exemple proposé pour troisième tâche : les auteurs proposent de « contrôler le résultat » grâce à un tableau de valeurs ou à une représentation graphique (sous-entendu à la machine, puisque le tableau de valeurs et la représentation graphique donnée sont reproduits par l'écran d'une calculatrice). Le tableau de valeurs donne la mention « erreur » en face de la valeur exclue du domaine (à condition que cette valeur soit dans le tableau demandé, ce n'est donc bien qu'un contrôle a posteriori). La représentation graphique, elle, montre deux branches asymptotiques verticales au niveau de l'abscisse correspondant à la valeur à exclure (sans que l'asymptote elle-même soit tracée) laissant supposer qu'il n'y a pas de point ayant cette abscisse sur la courbe.

***Modules***

Comme l'indiqué dans le manuel, les modules complètent les méthodes et offrent un choix d'activités variées pour s'adapter à l'hétérogénéité et aux aspirations des élèves. Ils sont au nombre de quatre :

- savoir exprimer différemment une même fonction,
- savoir lire une représentation graphique,
- savoir raisonner,
- savoir argumenter.

**Le premier module** a pour but de jouer sur différents modes de représentation d'une même fonction, à savoir en langue naturelle, par une formule, et par une " expression codée machine " (c'est-à-dire une écriture du programme à entrer dans la machine pour calculer les valeur de la fonction à partir des valeurs de la variable).

C'est donc une activité de changement explicite de registres de représentation sémiotiques. Dans un tableau à trois colonnes (correspondant aux trois registres de représentation), une première ligne donne les trois représentations, ensuite les trois lignes suivantes donnent tour à tour un seul des modes de représentation, enfin la dernière ligne est vide et il est demandé à l'élève d'inventer un exemple de son choix.

**Le deuxième module** étudie comment tracer la représentation graphique d'une fonction à l'aide d'une calculatrice et propose une réflexion sur la variabilité de la représentation en fonction du choix des unités sur chaque axe. Notons que l'exemple utilisé ici est celui d'une fonction affine.

**Le troisième module** part d'un tableau de valeurs d'une fonction définie sur l'intervalle [-2 ; 2] et de trois représentations graphiques qui pourraient être proposées par des élèves :

- la première ne donne que les points correspondants aux valeurs du tableau,
- la deuxième relie ces points par des segments de droites,
- la troisième donne une courbe "lisse" passant par ces points.

On demande aux élèves de commenter chacune de ces propositions supposées d'élèves. C'est ici une réflexion sur les conceptions des élèves quant au lien entre un tableau de valeurs et une représentation graphique qui est proposée. Le premier cas se limite à une représentation des seules données du tableau, mais ne peut convenir pour une fonction définie sur un intervalle. Dans les deux autres cas, on complète l'information contenue dans le tableau, ce qui est correct. Le deuxième cas correspond à des graphiques couramment rencontrés dans la presse par exemple, mais risque de rebuter certains élèves par des " pics " qui peuvent ne pas être associés à la représentation d'une fonction. Dans ce sens, la dernière représentation correspond plus à l'idée d'une fonction. Remarquons qu'aucune proposition ne va à l'encontre des variations supposées de la fonction, c'est-à-dire qu'aucun exemple ne présente de changements de variation entre deux valeurs successives du tableau de valeurs.

**Le quatrième module** étudie les changements explicites de registres sémiotiques de représentation entre la formule, le tableau de valeurs et la représentation graphique. On donne :

- 4 expressions algébriques,
- 4 tableaux de valeurs,
- 4 représentations graphiques.

L'élève doit alors associer ces objets par triplet en explicitant ses critères de choix. La tâche de l'élève consiste à trouver les critères pour associer ces registres.

Les quatre formules ne sont pas familières pour les élèves : ce sont des fonctions comportant une racine carré, un polynôme du troisième et du dixième degré, et une fraction rationnelle. Tous les tableaux de valeurs sont donnés sur l'intervalle [0; 1] avec un pas de 0,2. Les représentations graphiques sont données comme des copies d'écran d'une machine à calculer, où l'on donne les paramètres de la fenêtre, c'est-à-dire, Xmin, Xmax, Xscl, Ymin, Ymax et Yscl, identiques pour les quatre représentations. Ceci suggère nettement d'employer la calculatrice, ce qui peut effectivement s'avérer d'un grand secours. On peut d'ailleurs s'étonner que les tableaux de valeurs n'aient pas aussi été donnés comme des copies d'écran de machine à calculer.

### II.1.2 Synthèse sur l'utilisation du tableau de valeurs

Nous allons maintenant examiner de plus près les propriétés des tableaux de valeurs utilisés. Pour cela, nous allons reprendre les variables que nous avons dégagées dans l'introduction pour montrer comment elles s'actualisent dans chaque cas rencontré. Nous résumons les résultats dans le tableau suivant :

| | $V_{nombre}$ | $V_{nature}$ | $V_{ordre}$ | $V_{pas}$ | $V_{mn/mx}$[11] | $V_{sym}$[12] | $V_{hr/vt}$ | Compléments |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Activités | 17 | ent-9<br>1/2ent-8 | croiss | 0,5 | borne<br>[-4 ; 4] | oui<br>(à O) | H | avec h(x) = 1/2x²-3 |
| | 6 | entiers | croiss | | | | H | contexte concret :<br>date/nombre d'Internet |
| | 7 | entiers | pas ordre | | | | H | deux variables,<br>périmètre/aire du carré |
| | 7 | entiers | pas ordre | | | | H | deux variables<br>périmètre/aire du disque |
| | 6 | entiers | croiss | | | | H | f(x) = log(x),<br>avec calculatrice |
| | 6 | entiers | croiss | | | | H | programmation,<br>avec calculatrice |
| Cours | 10 | entiers | croiss | 1 | borne<br>[-5 ; 4] | | H | avec f(x) = 1/4x²-2x+1 |
| | 7 | entiers | croiss | 1 | borne<br>[-3 ; 3] | oui<br>(à O) | V | avec 2 courbes correspt.<br>tiré d'une calculatrice |
| Méthodes modules | 7 | ent-4<br>1/2ent-3 | croiss | 0,5 | | | V | vérification de E, tiré<br>d'1 calculatrice |
| | 9 | ent-5<br>1/2ent-4 | croiss | 0,5 | borne<br>[-2 ; 2] | oui | H | avec 3 propositions (2<br>courbes et les points) |
| | 6 | ent-2<br>déc-4 | croiss | 0,2 | borne<br>[0 ; 1] | | H | quatre fonctions<br>ensemble dans ce tvl |

**Tableau n°1 : Caractéristiques des tableaux de valeurs dans le cours de Fractale (chapitre 1)**

Il y a six activités dans ce manuel et on peut remarquer que le tableau de valeurs apparaît dans cinq d'entre elles, ce qui montre que pour ces auteurs cet outil joue un rôle important dans l'introduction de la notion de fonction.

Dans le cours, le tableau intervient au moment de sa définition et dans la rubrique « Zoom sur le cours » qui précise la relation entre le tableau et la courbe.

---

[11] $\mathbf{V_{min/max}}$ : Nous avons mis « borne » si les valeurs maximale et minimale du tableau correspondent aux bornes de l'intervalle et nous avons ajouté l'ensemble de définition quant il est précisé.( Df : ensemble de définition).

[12] $\mathbf{V_{sym}}$ : Quant il s'agit d'une symétrie, nous avons précisé « oui », (à O) : symétrie par rapport à l'origine. Si Df n'est pas connu, alors la case est laissée vide.

Nous remarquons également que le nombre de variables est relativement constant (6 ou 7), sauf dans le tableau qui représente une situation de la vie courante (pour laquelle un grand nombre de données ont été prises) et dans celui lié à la définition qui comporte 10 valeurs. Nous faisons l'hypothèse que les auteurs ont voulu montrer, lors de la définition, un tableau très complet avec un grand nombre de valeurs entières.

On utilise plutôt les nombres entiers comme valeurs de la variable et celles-ci sont en général dans l'ordre croissant. On peut penser que les auteurs n'ont pas voulu rendre les tâches complexes pour les élèves par l'utilisation de nombres non entiers lors des activités d'introduction.

Les ensembles de définition ne sont pas toujours précisés mais dans le cas où ils le sont, $V_{min/max}$ correspond toujours aux bornes des intervalles. Si l'intervalle de définition est symétrique alors les valeurs du tableau sont aussi symétriques par rapport à l'origine.

A propos de la calculatrice ; on demande, deux fois, de l'utiliser pour compléter un tableau et une fois on utilise un tableau de valeurs fait à la calculatrice.

Concernant les tâches, on trouve finalement deux types généraux de tâches classiques que les élèves ont déjà effectuées en classe de 3$^{ème}$ et qu'ils auront à effectuer lorsqu'ils étudieront des fonctions : « compléter un tableau de valeurs à partir d'un expression algébrique ou d'un contexte géométrique » et « construire une courbe à partir d'un tableau de valeurs ». Ce qui est nouveau ici pour les élèves, ce sont les fonctions qui ne sont plus seulement affines.

### II.1.3 Chapitre : Etude des variations d'une fonction

***Les activités***

**La première activité** s'intitule « Fonction donnée par sa représentation graphique ».

On donne quatre représentations graphiques (une seule concerne une fonction affine par morceaux, les autres ne comportent pas de droites) et on demande de répondre à certaines questions pour conjecturer le sens de variation et les extrema d'une fonction.

**La deuxième activité** s'intitule « Fonction dont on connaît un tableau de valeurs ».

Cette activité est la suivante :

La fonction f est définie sur l'intervalle [-2 ; 6]. On en donne un tableau de valeurs.

| ***x*** | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***f(x)*** | -4 | -1 | -3 | -10 | -5 | -2 | 7 | 9 | 13 |

1. Que peut-on dire de la plus grande valeur, puis de la plus petite valeur prises par la fonction f sur l'intervalle [-2 ; 6] ?
2. Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses (en justifiant la réponse)
a) Si x appartient à l'intervalle [-2 ; 6], alors f(x) appartient à [-10 ; 13].
b) Sur l'intervalle [1 ; 6], si x augmente, alors f(x) augmente.
c) Sur l'intervalle [-2 ; 1], si x augmente, alors f(x) diminue.
3. Proposer trois courbes représentatives possibles pour la fonction f.

Le but de cette activité consiste à montrer qu'un tableau de valeurs ne donne que des informations partielles, et en particulier, ne suffit pas pour connaître les variations et les extrema d'une fonction. En effet, dans les questions 1 et 2, il est fort probable que les élèves répondent naturellement que la plus grande valeur est 13, la plus petite est $-10$ et que les 3 affirmations sont vraies. Il est même fort possible que dans une classe entière cette position soit unanime et ne fasse l'objet d'aucun débat. Néanmoins, il n'est pas impossible que certains élèves réalisent que la fonction peut prendre n'importe quelle valeur entre les valeurs entières des abscisses du tableau. La question 3 est en quelque sorte un moyen de faire émerger cette idée si elle n'était pas apparue avant. Tout d'abord il s'agit de voir que plusieurs fonctions peuvent correspondre à un même tableau de valeurs. Le cadre graphique oblige à marquer ce qui se passe entre les points correspondants aux valeurs du tableau. Toutefois, il est rare de rencontrer une fonction ayant un comportement « erratique » entre deux points d'abscisses entières successives. Ainsi, par une sorte d'effet de contrat, les élèves auront certainement du mal à imaginer autre chose que la courbe « standard » correspondant à ce tableau de valeurs. Il s'agit donc bien, à travers cet exercice, de remettre en cause des conceptions fortement ancrées, et renforcées par des effets de contrat didactique, sur le lien entre la fonction et son tableau de valeurs en particulier au regard de la monotonie et des extrema et du tracé de la courbe représentative.

**La troisième activité** s'intitule « Décrire une situation par une fonction ».

On donne le tableau de valeurs de l'évolution de la population sur la Terre de 10 ans en 10 ans entre 1880 et 1990, puis en 1995, 1996, 1997 et 2000.

Dans un premier temps, on demande à l'élève de représenter graphiquement l'évolution de cette population (on suggère d'utiliser un tableur) puis d'en décrire les variations. Est-ce qu'ici on attend une représentation sous la forme d'une courbe ? Si oui, comment les points correspondant aux données du tableau sont-ils sensés être reliés ? Vu que cette activité s'insère dans le chapitre sur les fonctions, il semble bien que ce soit ce qui est attendu, les points devant être reliés par des segments de droite. Néanmoins, la nature des données ainsi que l'appel à utiliser un tableur peuvent faire préférer une représentation par histogramme avec des bâtonnets. Dans un cas, on a une représentation continue du phénomène, on construit en quelque sorte une fonction d'interpolation, dans l'autre on reste sur une représentation discrète ne représentant que les valeurs données, il n' y a pas de fonction. Seuls une injonction de l'enseignant et un effet fort du contrat peuvent faire préférer à l'élève la première option.

La question sur les variations est ambiguë, en effet si l'élève a bien compris l'activité précédente, il ne pourra rien dire sur ce qui se passe entre les années du tableau. Pourtant le contexte concret ici assure que le comportement de la population entre deux années du tableau n'a pas pu être trop différent. En fait, il semble très probable que cette population ait augmenté tout au long entre 1880 et 2000 comme c'est le cas pour les valeurs du tableau. Contrairement à l'activité précédente où la fonction était déconnectée de tout contexte de réalité, ici le contexte induit un comportement de la fonction entre les valeurs du tableau.

On demande ensuite à l'élève de calculer le pourcentage d'augmentation tous les dix ans puis de décrire et commenter l'évolution de ce pourcentage. Ici, tout peut se faire hors du contexte des fonctions, c'est une occasion de revenir essentiellement sur des calculs de pourcentages essentiellement.

Enfin on demande aux élèves si on peut estimer la population d'une part en 1936 et 1968 (valeurs intermédiaires non spécifiées dans le tableau) et en 2001 et 2010 (valeurs au-delà du tableau). Cette question vise à donner une idée de la construction d'une fonction d'interpolation modélisant l'évolution de la population et respectant les données du tableau. Pour ceux des élèves ayant tracé une courbe affine par morceau au 1), la première partie de la question devrait ne pas poser de problème. Pour les autres, il y a fort à parier que le problème se transforme en un problème de proportionnalité, tant le modèle linéaire est prégnant.

**La quatrième activité** s'intitule « Proposer des représentations graphiques ». Dans quatre cas différents, on demande de donner deux représentations graphiques de fonctions vérifiant certaines propriétés. Voici les deux premiers cas proposés :

> 1) La plus grande valeur prise par la fonction $h$ est égale à 3 ; elle est obtenue en –1 en 1.
> La plus petite valeur prise par $h$ est –6 ; elle est obtenue en 0.
> 2) La fonction $f$ conserve le sens des inégalités sur [-5 ; -2], puis change le sens des inégalités sur [-2 ;2].
> $f(-5) = f(2) = 0$

Le but de cette activité est de faire traduire à l'élève graphiquement les notions du maximum, du minimum et du sens de variation à partir du registre de la langue naturelle. De plus on veut montrer à l'élève qu'il y a plusieurs fonctions ayant des propriétés identiques.

**Les cinquième et sixième activités**, abordent des problèmes géométriques conduisant à une modélisation en termes d'optimisation d'une fonction. Les deux exemples sont très classiques : rectangle de périmètre donné ayant la plus grande aire d'une part et distance la plus courte d'un point à un autre après « rebond » sur une droite. Dans les deux cas, la variable x est spécifiée d'entrée de jeu et les questions sont très découpées, ne laissant que peu d'initiative à l'élève.

Dans les deux problèmes, l'élève est invité à partir d'un tableau de valeur à conjecturer le maximum. Notons que la valeur entière de la solution permet de faire la bonne conjecture à partir du tableau de valeurs.

En fait, les connaissances des élèves ne leur permettent pas de démonter rigoureusement le résultat dans le cadre algébrique, ils doivent se contenter d'une conjecture en utilisant leur calculatrice. Notons au passage que les données du problème conduisent à une solution entière, donc que les élèves peuvent conjecturer le bon résultat. Ceci risque de renforcer la conception consistant à croire que les valeurs en des abscisses entières suffisent pour connaître les variations de la fonction, contrairement à ce qui avait été tenté avec l'activité 2. L'absence d'une démonstration possible dans le cadre algébrique des fonctions conduit à la nécessité d'une démonstration géométrique. Le risque ici est que les élèves voient la modélisation par la fonction comme une complication inutile.

***Le cours***

Dans cette partie on donne deux définitions et des explications : Sens de variation d'une fonction, tableau de variations d'une fonction et maximum et minimum d'une fonction.

*1. Sens de variation d'une fonction*

> On dit qu'une fonction est **croissante** (respectivement **décroissante**) sur un intervalle E lorsqu'elle conserve (respectivement change) le sens des inégalités sur cet intervalle.
> Cela signifie que, pour tout couple (a, b) d'éléments de E :
> Si $a < b$, alors $f(a) \leq f(b)$ (respectivement $f(a) \geq f(b)$).

Cette définition qui utilise un mélange des registres de la langue naturelle, et algébrique est de plus accompagnée d'une illustration graphique.

*2. Tableau de variations d'une fonction*

Contrairement à ce qui avait été fait pour le tableau de valeurs, il n'y a pas de définition à proprement parler de ce qu'est un tableau de variations mais seulement l'explication suivante :

> Etudier le sens de variation d'une fonction consiste à partager l'ensemble de définition de la fonction en une succession d'intervalles sur lesquels la fonction est soit croissante, soit décroissante. On résume ces résultats dans un tableau appelé « **tableau de variations** ».

Cette explication portant sur la tâche à accomplir pour tracer le tableau de variations montre qu'elle est caractérisée, dans ce manuel, comme une recherche d'intervalles où la fonction est monotone.

*3. Maximum et minimum d'une fonction.*

> Lorsqu'il existe, le maximum M (respectivement minimum m) d'une fonction f sur un intervalle E est la plus grande (respectivement petite) valeur prise par f(x) lorsque x décrit E.
> Cela signifie qu'il existe a, élément de E, tel que $f(a) = M$ (respectivement $f(a) = m$) et, pour tout x, élément de E, $f(x) \leq M$ (respectivement $f(x) \geq m$)

Cette définition est aussi illustrée dans le registre graphique. Ensuite, on donne deux propriétés avec une démonstration :

Propriété 1 :
Si une fonction f est croissante sur l'intervalle [a ; b], puis décroissante sur l'intervalle [b ; c], alors elle admet sur l'intervalle [a ; c] un maximum égal à f (b).
Propriété 2 :
Si une fonction f est décroissante sur l'intervalle [a ; b], puis croissante sur l'intervalle [b ; c], alors elle admet sur l'intervalle [a ; c] un minimum égal à f (b).

La résolution de la tâche « déterminer le maximum (le minimum) de *f* sur I » vient après l'étude du sens de variation de *f* sur I dans ce manuel ; la tâche est ainsi subordonnée à la détermination préalable du sens de variation de *f* sur I. De fait, les propriétés 1 et 2 ramènent la détermination des extrema d'une fonction à la lecture du tableau de variations. En pratique, il existe peu de cas où ces deux propriétés ne soient pas caractéristiques d'un extremum. En tous cas, c'est vrai pour toutes les fonctions que les élèves rencontreront en classe de seconde et même tout au long du lycée, même en section S et même dans leurs premières années d'université. En effet, un contre-exemple nécessite de construire une fonction ayant un extremum en b et qui ne serait monotone sur aucun intervalle de la forme [a ; b] ou de la forme [b ; c].

Ainsi le tableau de variations s'impose comme l'outil essentiel pour l'étude des variations, mais aussi pour la détermination des extrema d'une fonction.

Dans le rubrique « **Zoom sur le cours** » on étudie deux conversions : la conversion entre tableau de variations et la représentation graphique d'une part, la conversion entre le tableau de variations et le tableau de valeurs, et d'autre part.

- tableau de variations d'une fonction et la représentation graphique,

  « à une courbe donnée correspond un seul tableau de variations possible, mais, inversement, à un tableau de variation donné, on peut associer plusieurs courbes différentes. »

Cette conversion est expliquée à partir d'un exemple : On donne une courbe et le tableau de variations correspondant, ensuite on donne deux courbes nouvelles qui correspondent au tableau de variations donné.

- et tableau de variations d'une fonction et tableaux de valeurs,

  « à un tableau de valeurs donné peuvent correspondre plusieurs tableaux de variations et, inversement, à un tableau de variations donné, on peut associer plusieurs tableaux de valeurs différents. »

Cette conversion est aussi explicitée par l'exemple suivant :

« Soit le tableau de valeurs de la fonction *f* donné ci-dessous. Les tableaux de variations A et B sont tous les deux compatibles avec ce tableau de valeurs.

| ***x*** | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| ***f(x)*** | 0 | 2 | 3 | 1 | -2 |

| *x* | -1 | | 1 | | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| *f* | 0 | ↗ | 3 | ↘ | -2 |

Tableau A

| *x* | -1 | | 0,5 | | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| *f* | 0 | ↗ | 4 | ↘ | -2 |

Tableau B

Inversement, le tableau de variations A peut correspondre à plusieurs tableaux de valeurs, sur le même intervalle et avec le même pas, par exemple à ceux des fonctions *g* et *h*.

| ***x*** | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| ***g(x)*** | 0 | 0,5 | 3 | -1 | -2 |

| ***x*** | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| ***h(x)*** | 0 | 2,5 | 3 | 2,5 | -2 |

Remarquons ici que c'est le seul manuel qui étudie la conversion entre deux tableaux. Notons que dans cet exemple on ne précise pas l'ensemble de définition de la fonction. Il s'agit là selon nous, de la mise en évidence d'une règle du contrat qui indique que le domaine de définition est indiqué par les valeurs extrêmes données dans le tableau de valeurs.

***Méthodes et exercices résolus***

Dans cette partie, trois types de tâches sont abordés :

*1- Montrer qu'une fonction est croissante sur un intervalle E donné.*

Même si cela n'est pas précisé explicitement dans le manuel, cette tâche n'est envisagée ici que dans le cas où la fonction est connue par son expression algébrique. On se situe donc bien ici dans le cadre algébrique uniquement.

On donne deux méthodes (techniques) pour résoudre cette tâche :

**Méthode 1**. On considère deux éléments quelconques a et b de l'intervalle E tels que a <b, on prouve que f(a)≤ f(b) en appliquant les règles de calcul sur les inégalités
**Méthode 2**. On considère deux éléments a et b quelconques de l'intervalle E tels que b-a> 0, on prouve que f(b) – f(a)≥ 0 en factorisant (b-a), puis en utilisant les règles du produit des signes.
Remarque : On adapte facilement ces méthodes pour prouver que la fonction f est décroissante sur un intervalle donné.

Deux exemples sont traités portant tous deux sur des fonctions du second degré. Dans le premier cas (croissance de $x^2+2x–1$ sur $IR^+$) on utilise seulement la première méthode, dans le deuxième (croissance de $x^2-2x-1$ sur [1 ; +∞[) après avoir rapidement dit que la première méthode est en défaut (« ne permet pas de conclure directement »), c'est la deuxième méthode qui est mise en œuvre.

En fait, la deuxième méthode est un peu plus complexe à mettre en œuvre, mais elle est aussi plus générale. C'est bien ce que sous-entendent les auteurs du manuel.

Par ailleurs, on voit bien sur les deux exemples résolus que l'outillage de l'une ou l'autre des techniques est entièrement de l'ordre du calcul algébrique en lien avec les inégalités. De fait, ce sont les connaissances antérieures acquises depuis peu relatives chapitre de début de seconde « Ordre des nombres et valeur absolue » qui sont ici mobilisées.

2- Montrer qu'une fonction f définie sur [a ; b] admet un maximum en c

Ici aussi on se place dans le cas où la fonction est définie par son expression algébrique. On donne également deux méthodes (techniques) pour résoudre cette tâche :

> **Méthode 1**. On démontre que la fonction est croissante sur [a ; c] et décroissante sur [c ; b]
> **Méthode 2**. On calcule f(c) - f(x), puis on démontre que cette expression est toujours positive.
> Remarque : On adapte facilement ces méthodes pour prouver qu'une fonction admet un minimum sur un intervalle donné.

La première méthode renvoie à la tâche précédente, alors que la deuxième conduit à des calculs algébriques avec des inégalités. Dans les deux cas, l'outillage est à nouveau algébrique et il est lié, comme précédemment aux connaissances des élèves acquises lors du chapitre « ordre et valeur absolue » du début de seconde.

On donne un exercice résolu (monter que $f : x \to -x^2 + 4x$ admet un maximum en 2 sur IR) sur lequel on applique tour à tour les deux méthodes. Aucun commentaire n'est fait pour comparer l'efficacité des deux méthodes.

Ensuite, deux exercices d'application sont proposés portant tous deux sur des fonctions carrées. A noter aussi que l'extremum est dans les trois cas atteint en 2 ! ! ! Enfin dans le dernier cas, on restreint l'étude à l'intervalle [1 ; 8] qui contient 2.

*3. Résoudre un problème d'optimisation*

Pour ce type de tâche, voici ce que les auteurs du manuel proposent comme technique :

> Dans l'étude d'une situation dépendant d'une variable, on peut être conduit à chercher pour quelle valeur de la variable le phénomène est optimal (c'est-à-dire maximal ou minimal)
> Méthode :
> - Choisir la variable et lui donner un nom (x, t, …)
> - Traduire les données du problème sous la forme d'une fonction de la variable choisie.
> - Etudier les variations de cette fonction.
> - Démonter l'existence d'un maximum ou d'un minimum.

Il s'agit donc ici d'étudier une situation qui se modélise en termes de fonction et dont la question revient à trouver l'extremum de la fonction.

Ainsi les deux première étapes de la méthode relève de la modélisation (choix de la (des) variable(s) et modélisation) alors que les deux dernières se ramènent aux deux tâches précédentes (remarquons que la troisième étape pourrait être facultative si on démontre l'existence de l'extremum par la première méthode de recherche d'un extremum. C'est d'ailleurs bien ce qui est fait dans l'exercice résolu qui suit !) Donc on peut dire qu'il y a essentiellement trois étapes : 1) choix de la variable 2) modélisation par une fonction 3) détermination de l'optimum. Il est intéressant de noter ici que les auteurs ne portent pas d'attention à la dernière étape de la modélisation, qui consiste en l'interprétation, dans le contexte de la situation, du résultat obtenu dans le modèle. Cela laisse supposer que la modélisation sera relativement transparente dans les exemples proposés.

Un exemple est donné avec la résolution complète, puis un exercice d'application est proposé. Notons que tous les exemples portent sur de situations issues de la géométrie (même si certaines ont un habillage concret : clôture de champ, fourmi qui se déplace, billard, etc…). De plus, dans tous les cas, la première étape (choix de la variable) est prise en charge dans l'énoncé. Notons aussi que dans tous ces exercices on utilise la fonction du second degré.

***Modules***

Ils sont au nombre de quatre:

- Comprendre le lien entre sens de variation d'une fonction et inégalités
- Savoir déterminer les encadrements les plus précis possibles
- Associer courbes, tableau de variations et tableaux de valeurs
- Savoir utiliser une calculatrice numérique ou graphique

**Le premier module** a pour but de faire comprendre le lien entre sens de variation d'une fonction et inégalités. En effet, on donne le sens de variation d'une fonction dans un intervalle et on demande de répondre si les inégalités données sont vraies ou pas. On se place toujours dans le registre algébrique pour ce module.

**Le deuxième module** étudie comment déterminer les encadrements en utilisant les règles de calcul sur les inégalités et la notion de sens de variation d'une fonction. Comme le premier module, on se place toujours dans le registre algébrique.

**Le troisième module** a pour but de jouer sur différents modes de représentation d'une même fonction, à savoir par un tableau de variations, par une courbe et par un tableau de valeurs. C'est donc une activité de conversion explicite entre les trois modes de représentations sémiotiques.

Dans un tableau de trois colonnes (correspondant aux trois modes de représentations), chaque ligne donne tour à tour un seul des modes de représentation. On demande de compéter le tableau en précisant « *Dans les cas où plusieurs réponse sont possibles, on en donnera deux distinctes* ».

**Le quatrième module** étudie l'utilisation d'une calculatrice pour conjecturer et vérifier le sens de variation et les extrema d'une fonction. En effet, on donne des expressions algébriques et on demande d'émettre des hypothèses sur l'existence d'un minimum et d'un maximum en construisant des tableaux de valeurs et des représentations graphiques.

### II.1.4 Synthèse sur l'utilisation du tableau de valeurs

Comme nous l'avons fait pour le chapitre précédent, analysons maintenant les propriétés des tableaux de valeurs et les tâches associées à son utilisation. Nous résumons les résultats dans le tableau suivant :

| | $V_{nombre}$ | $V_{nature}$ | $V_{ordre}$ | $V_{pas}$ | $V_{min/max}$ | $V_{sym}$ | $V_{hr/vt}$ | Compléments |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Activité** | 9 | entiers | croiss | 1 | borne [-2 ; 6] | | H | conjecturer aussi les extrema, les variations |
| | 16 | entiers | croiss | | | | H | contexte concret |
| **Cours** | 5 | entiers | croiss | 1 | borne [1 ; 3] | | H | relation entre tvl et tvr, trois fois tvl |
| **Méthode modules** | 11 | entiers | croiss | 20 | borne [0 ; 200] | | H | vérifier le point max. sans calculatrice |
| | 7 | entiers | croiss | 25 | | | V | vérifier le point max. avec une calculatrice |
| | 5 | entiers | croiss | 1 | | | H | relations tvl ↔tvr ↔G |

**Tableau n°2: Caractéristiques des tableaux de valeurs dans le cours de Fractale (chapitre 2)**

Dans ce chapitre, le tableau de valeurs est bien moins utilisé. On a plutôt tendance à utiliser le tableau de variations puisque c'est l'objet du chapitre.

Nous remarquons que, comme dans la partie « Activités et cours », le nombre de variables peut varier selon le contexte utilisé (dans le contexte de la vie courante, un grand de nombre de données ont été prises) et qu'on utilise 4 ou 5 variables pour le passage d'un tableau de valeurs à un tableau de variations et vice-versa. On utilise davantage un pas régulier (dans le cas de 20 et 25 comme le pas, il s'agit de vérifier un résultat déjà trouvé).

Les ensembles de définition ne sont pas toujours précisés mais dans le cas où ils le sont, $V_{min/max}$ correspond toujours aux bornes des intervalles. Puisqu'il n'y a pas d'intervalle de définition symétrique dans cette partie, on ne peut pas envisager de symétrie des valeurs du tableau.

A propos de la calculatrice, on demande, une fois, de l'utiliser pour compléter un tableau de valeurs (vérifier le point maximum) et deux fois, on utilise un tableau de valeurs fait par l'écran d'une calculatrice.

*Concernant les tâches :*

Il y a six activités, le tableau de valeurs apparaît deux fois : une fois pour montrer qu'un tableau de valeurs ne suffit pas pour connaître les variations d'une fonction même s'il est très complet (avec toutes les valeurs entières), et l'autre est donné dans un contexte de la vie courante ; on veut montrer ici qu'on peut deviner les variations d'une fonction à partir d'un tableau de valeurs, seulement dans le cas où il s'agit d'un contexte connu. Donc, on constate ainsi que ce manuel essaie de montrer les limites du tableau de valeurs dans l'étude de la notion de fonction.

Pendant les parties « Cours » et « Exercices », on étudie le passage d'un tableau de valeurs à un tableau de variations et vice-versa avec un discours explicite sur la non unicité de la représentation. Dans la partie « Méthodes et modules », on utilise le tableau de valeurs comme un outil de vérification de certains résultats déjà trouvés, par exemple, pour vérifier le point maximum.

### II.1.5 Synthèse sur l'utilisation du tableau de variations

Nous précisons tout d'abord qu'il y a un paragraphe spécifique au tableau de variations d'une fonction où on donne des explications sur sa construction.

Voici les conversions qui sont étudiées explicitement dans ce manuel :

- Expression algébrique → Tableau de variations
- Tableau de variations ↔ Représentation graphique
- Tableau de variations ↔ Tableau de valeurs

Ces conversions sont étudiées en détail avec un discours explicite sur la non unicité de la représentation. On consacre pour chacune un paragraphe spécifique. On peut donc dire que dans ce manuel les conversions possibles en seconde qui sont liées au tableau de variations sont étudiées explicitement.

## II.2 Hyperbole Maths 2^nde^

Il présente quatorze chapitres dont deux portent sur l'étude des fonctions :

- Notion de fonction Etude qualitative
- Fonctions de référence

Chaque chapitre est construit de façon similaire et composé en général de quatre parties : L'ouverture, le cours, les activités et les exercices. Dans cette partie de notre étude, nous prendrons en compte seulement le chapitre « Notion de fonction. Etude qualitative ».

### II.2.1 Chapitre : Notion de fonction. Etude qualitative

***L'ouverture***

Cet partie comprend deux sections : « Pour démarrer » et « Hier, aujourd'hui, demain ». La rubrique « Pour démarrer » comporte quatre questions à choix multiples et il s'agit de remise en mémoire (indiqué par le manuel) des connaissances antérieures utiles dans le chapitre et il n'y a pas réellement de nouvelle connaissance. En effet, on étudie les tâches suivantes :

- Utilisation de l'expression « en fonction de »,

- Lecture de l'image d'un élément à partir d'une courbe,
- Connaître l'expression algébrique d'une fonction affine,
- Représentation graphique des variations d'un phénomène.

Dans la rubrique « Hier, aujourd'hui, demain », on essaye d'initier comment on peut lire les informations sur une courbe dans le contexte concret.

***Le cours***

Le cours se divise en deux parties : Fonctions et représentations graphique, et sens de variations d'une fonction.

La partie « Fonctions et représentations graphiques » commence par une approche dans le contexte concret en utilisant un tableau de valeurs et une courbe correspondante: il s'agit en effet de la distance parcourue par un pilote en fonction de la vitesse de sa voiture. Ensuite, on donne deux définitions : notion de fonction et courbe représentative d'une fonction :

> **Notion de fonction**
> D est une partie de l'ensemble IR des réels. Définir une fonction sur D c'est associer à chaque réel x de D, un réel et un seul, appelé l'image de x. D est appelé l'ensemble de définition de la fonction.
>
> **Courbe représentative d'une fonction**
> f est une fonction définie sur D. Dans un repère, la courbe représentative $\xi$ de la fonction f, est l'ensemble des points de coordonnées (x ; y) telles que : $x \in D$ et $y = f(x)$. On dit que la courbe $\xi$ a pour équation $y = f(x)$ dans ce repère.

On introduit les notions d'image, d'antécédent et d'ensemble de définition à partir de la définition de la fonction dans le registre algébrique. Remarquons ici que ces notions ne sont pas explicitées à partir de la courbe représentative d'une fonction.

Avant de passer à d'autres définitions, on donne trois exercices résolus (cette partie s'appelle « les méthodes » dans le manuel) :

- *Définir une fonction par une formule,*
- *Définir une fonction par un tableau de valeurs,*
- *Définir une fonction par une courbe.*

Dans ces trois exercices résolus, on demande chaque fois si la relation donnée définit une fonction. On veut faire réfléchir ainsi sur la définition d'une fonction dans les différents modes de représentation.

Nous détaillons ici le deuxième exercice résolu.

On lâche une bille d'acier d'une hauteur h (en m) et on mesure le temps t (en s) qu'elle met pour atteindre le sol. Les résultats sont réunis dans le tableau ci-contre.
Ce tableau définit-il une fonction qui à h associe t ?

| ***h*** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ***t*** | 0,45 | 0,64 | 0,78 | 0,9 | 1 | 1,1 |

La technique pour réaliser cette tâche est de s'assurer qu'il n'y a pas, dans la première ligne du tableau, de valeur reproduite deux fois ou, au contraire de relever une telle valeur ainsi que ses images distinctes. La fonction est donc ici définie sur un ensemble fini.

Ce manuel est le seul où l'on étudie une fonction définie sur un ensemble fini. Notons que ce type d'exercice est compatible avec l'esprit du programme actuel :

> Les fonctions abordées ici sont généralement des fonctions numériques d'une variable réelle pour lesquelles l'ensemble de définition est donné. On pourra voir quelques exemples de fonctions définies sur un ensemble fini ou même de fonction à deux variables (aire en fonction des dimensions) (Programme de Seconde 2000)

Dans la deuxième partie du cours, il s'agit de l'étude du sens de variation d'une fonction. On donne en effet la définition d'une fonction croissante, d'une fonction décroissante, et de maximum et de minimum d'une fonction sur un intervalle.

L'étude du sens de variation d'une fonction est expliquée à partir d'une courbe, puis on construit le tableau de variations en disant « on résume ainsi les informations obtenues ci-contre ». Il n'y a par contre aucune information explicite sur la construction effective d'un tel tableau.

Deux exercices suivent ces définitions :

Le premier exercice s'intitule « Dessiner une courbe compatible avec un tableau de variations ». Il consiste en fait à étudier la conversion d'un tableau de variations en une représentation graphique. On donne un tableau de variations et on demande de tracer une courbe représentant la fonction. Dans un premier temps, on trace une courbe lisse en disant « voici **la courbe** représentant la fonction ». Notons qu'on ajoute l'information « il n'y a pas une seule façon de tracer une courbe compatible avec le tableau de variations de la fonction.» accompagné d'un autre tracé joignant les points correspondant aux valeurs du tableau par des segments de droites. Il n'y a pas plus de discussion à propos de cet exemple, ni d'autres réponse.

Le deuxième exercice s'intitule « Lire, avec prudence, des informations sur un écran graphique ». Il s'agit de rappeler que sur un écran de calculatrice graphique, les informations sur le sens de variation, les maximums et les minimums ne sont pas exhaustives.

***Les activités***

Elles sont au nombre cinq :

**La première activité** s'intitule « Fonction et calculatrice ».

L'idée ici est de donner les connaissances de base liée à la calculatrice et de l'utiliser comme une « boîte noire » qui permet d'associer un nombre à un autre nombre.

**La deuxième activité** s'intitule « Fonction et pas fonction ».

Elle consiste à faire réfléchir sur la définition d'une fonction à partir d'un tableau de valeurs et de la langue naturelle.

Dans la première partie on utilise un tableau de valeurs qui donne le nombre d'achat et le montant des achats de cinq personnes à la caisse d'un magasin. On demande d'expliquer pourquoi ce tableau ne définit pas une fonction (à un même montant correspond deux nombres d'achats différents).

Remarquons que c'est le seul manuel dans lequel on voit un tableau de valeurs qui ne définit pas une fonction. Notons que ce type d'exercice est aussi conforme au programme de seconde (2000) où on précise :

> « On réfléchira sur les expressions être fonction de et dépendre de dans le langage courant et en mathématique. On donnera des exemples de dépendance non fonctionnelle (poids et taille, note au bac et moyenne de l'année).

Dans la deuxième partie on donne trois relations en langue naturelle et on demande de préciser si chaque cas définit une fonction.

**La troisième activité** s'intitule « Fonction à deux variables ».

Il s'agit de l'étude de l'aire d'un trapèze en fonction de sa hauteur et de sa longueur. C'est donc un exemple d'introduction d'une fonction de deux variables. C'est aussi une suggestion du programme. On notera que ce manuel est le seul à reprendre une à une les suggestions du programme.

**La quatrième activité** s'intitule « Graphiques et symétries ».

A partir de deux courbes sur l'écran d'une calculatrice, on demande de conjecturer un élément de symétrie pour arriver à donner la définition d'une fonction paire et impaire. A la fin de cette activité, les définitions d'une fonction paire et d'une fonction impaire sont données comme « info » dans le registre graphique.

**La cinquième activité** s'intitule « D'une courbe à un tableau de variations ».

Elle consiste à faire lire un graphique. On demande de donner l'ensemble de définition, de construire le tableau de variations et de donner certains maxima et minima locaux.

**La sixième activité** s'intitule « Evolution d'une population animale ». Elle consiste à faire utiliser l'informatique avec le contexte de la vie courant. Il s'agit en effet d'un travail avec Excel.

### II.2.2 Synthèse sur l'utilisation du tableau de valeurs

Comme nous l'avons fait pour le manuel Fractale, examinons maintenant de près les propriétés des tableaux de valeurs utilisés :

| | $V_{nombre}$ | $V_{nature}$ | $V_{ordre}$ | $V_{pas}$ | $V_{min/max}$ | $V_{sym}$ | $V_{hr/vt}$ | Compléments |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Cours** | 7 | Ents et décs | pas ordre | | Df ens. fini | | V | distance / vitesse |
| **Méthode** | 6 | entiers | croiss | 1 | Df ens. fini | | H | contexte concret |
| **Activité** | 5 | entiers | pas ordre | | Df ens. fini | | H | Nombre d'achats / montant des achats |

**Tableau n°3: Caractéristiques des tableaux de valeurs dans le cours de Hyperbole**

Nous constatons que le tableau de valeurs est beaucoup moins utilisé que dans le manuel précédent. Le nombre de valeurs des tableaux est relativement constant (7 ou 8) et les valeurs utilisées dans les tableaux sont des nombres entiers et décimaux. Les valeurs ne sont pas ordonnées dans deux cas sur trois.

Chaque fois que la situation est définie à partir d'un tableau de valeurs, celui-ci est relié à un contexte concret. Nous pensons que, dans ce cas, la notion de fonction est liée à la notion de correspondance entre deux séries de valeurs. Ceci nous semble très fort dans ce manuel.

On peut donc dire qu'il n'y a pas de conversion d'un tableau de valeurs à un autre registre et vice-versa. On l'utilise tout simplement comme un outil avec lequel on présente une situation de dépendance pour demander s'il présente une fonction ou pas. De plus, contrairement au manuel « Fractale », il n'y a aucun paragraphe spécifique consacré au tableau de valeurs, ni une explication sur son rôle et ses limites.

Enfin, le tableau de valeurs n'est jamais utilisé comme un registre d'entrée dans le contexte mathématique.

### II.2.3 Synthèse sur l'utilisation du tableau de variations

Précisons tout d'abord qu'il n'y a pas de paragraphe spécifique au tableau de variations d'une fonction. Le tableau de variations est construit à partir du registre graphique.

Aucune connaissance n'est donnée sur sa construction. Par contre, la conversion d'un tableau de variations vers le registre graphique est étudiée dans la partie « méthodes » où on précise qu'il n'y a pas une seule façon de tracer une courbe. Aucune autre information n'est précisée.

On peut donc dire que seule la conversion entre le tableau de variations et la représentation graphique est étudiée dans ce manuel.

## II.3 Pythagore maths 2nde

Il présente onze chapitres dont deux portent sur l'étude des fonctions :

- Fonctions
- Fonctions de référence

Chaque chapitre est construit de façon similaire et composé en général de quatre parties : les activités, le cours, les travaux pratiques et les exercices. Dans cette partie de notre étude, nous prendrons en compte seulement le chapitre « Fonctions ».

### II.3.1 Chapitre : Fonctions

***Les activités***

**Les deux premières activités** consistent à faire réviser les notions déjà étudiées (image, antécédent, équation et inéquation) au collège. On utilise une fois le registre graphique et une fois le registre algébrique. La notion de maximum et de minimum est utilisée également dans ces activités.

Remarquons ici que même si on essaie de rappeler les connaissances déjà étudiées au collège, les fonctions ne sont pas seulement affines. La courbe donnée dans la première activité ne présente pas de droite et l'expression algébrique donnée dans la deuxième activité présente une fonction de second degré ($f(x) = x^2 - x + 2$).

**La troisième activité** consiste à étudier la notion de croissance et de décroissance à partir de deux courbes, chacune représentant une fonction croissante et une fonction décroissante sur l'ensemble de définition. A la fin de cette activité, on essaie de faire conjecturer à l'élève la définition d'une fonction croissante.

***Le cours***

Il y a quatre paragraphes dans cette partie :

- *Fonction numérique d'une variable réelle :*

Dans ce paragraphe, on donne la définition d'une fonction et la définition de l'image d'un élément et la définition d'un antécédent :

> **Définition** : Une fonction numérique f d'une variable réelle associe, à tout réel x d'un sous-ensemble $E_f$ de IR, un unique réel noté f(x).
> **Définiti**on : On dit que f(x) est l'image de x par f et que x est un antécédent de f(x) par f. (Il se peut que plusieurs réels x aient la même image par f.)

Pour expliquer ces notions, on donne un exemple à partir d'une expression algébrique ($f(x) = 2x^2 - 1$ sur [-2 ; 1]). Remarquons ici qu'on construit un tableau de valeurs en disant « on peut réaliser un tableau de valeurs comme celui-ci » pour montrer qu'une valeur peut avoir deux antécédents. Voici le tableau de valeurs qui est donné :

| ***x*** | -2 | -1,3 | -1 | -0,6 | 0 | 0,5 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***f(x)*** | 7 | 2,38 | 1 | 0,28 | -1 | -0,5 | 1 |

Ce tableau est le premier tableau de valeurs dans ce manuel. Ce qui est frappant ici c'est qu'on n'utilise pas un pas régulier. Par contre, les valeurs de la variable sont ordonnées selon l'ordre croissant et $V_{min/max}$ correspond aux bornes de l'intervalle de définition. Remarquons d'autre part qu'on choisit dès le début des valeurs qui sont des différentes natures (entier, demi-entier, nombre décimaux)

Il est à noter qu'il n'y a aucune explication sur la construction d'un tel tableau et sur son rôle.

- *Représentation graphique*

Après avoir donné la définition de la représentation graphique d'une fonction, on montre comment faire la lecture graphique pour déterminer l'image ou un antécédent d'un élément.

- *Sens de variation d'une fonction*

Ce paragraphe est divisé en deux : il s'agit dans un premier temps de définir ce qu'est une fonction croissante, décroissante ou constante. Remarquons que c'est le seul manuel qui donne la définition d'une fonction constante en ajoutant « une fonction constante sur un intervalle I y est à la fois croissante et décroissante, et réciproquement. »

Dans un deuxième temps, il s'agit d'introduire le tableau de variations et ce paragraphe s'intitule « B. Tableau de variations d'une fonction ». On donne la représentation graphique d'une fonction, puis on précise le sens de variation de la fonction en langue naturelle, enfin on introduit le tableau de variations sans rien dire sur sa construction et sur les codes et les codages qui apparaissent dans le tableau de variations.

- *Parité et symétrie*

La notion de fonction paire ou impaire est expliquée à partir du registre graphique sans utiliser l'expression algébrique de la fonction.

***Les exercices résolus***

On donne quatre exercices résolus :

- Etude de la parité d'une fonction
- Etude graphique
- Démonstration de l'existence d'un minimum
- Etude du sens de variation d'une fonction

Ici, le registre algébrique est dominant. En effet, dans trois exercice, il s'agit de l'étude de différentes notions (parité, minimum, sens de variation) à partir du registre algébrique. Les fonctions utilisées sont des fonctions de second degré et des fonctions rationnelles.

Voici l'énoncé du quatrième exercice :

On considère la fonction f définie sur IR par f(x) = 3x² - 4.
a) Démontrer que f est paire
b) Démontrer que f est croissante sur [0 ; + ∞[.
c) En déduire le sens de variation de f sur ]- ∞ ; 0].
d) Dresser le tableau de variations de f, puis tracer la courbe représentative de la fonction dans le plan muni d'un repère orthonormal.

Remarquons ici que la notion de parité est utilisée comme un outil pour déduire le sens de variations de la fonction.

***Travaux pratiques***

**Les trois premiers TP** abordent des problèmes géométriques conduisant à une modélisation en terme d'optimisation d'une fonction (un maximum d'aire, graphique sur mesure, une longueur et des aires). Dans le premier TP, on demande d'établir un tableau de valeurs pour arriver à faire « tracer à main levée la courbe représentant la fonction » en précisant que cette courbe est régulière. On renforce ainsi l'idée de construire « point par point » la courbe d'une fonction.

**Le quatrième TP** s'intitule « Importance de l'intervalle dans la définition des fonctions croissantes ou décroissantes ». On alerte l'élève sur le fait qu'il faut toujours préciser l'intervalle quand on parle de la fonction croissante et décroissante.

**Le cinquième TP** s'intitule « Etude d'une courbe et observations graphiques ». A partir d'une expression algébrique ($f(x) = x^3 - 3x$ sur [-2 ; 2]), on donne un tableau de valeurs avec seulement les valeurs de la variable x et on demande de le remplir. Remarquons ici qu'on utilise un pas régulier (0,5) et les valeurs sont ordonnés dans l'ordre croissante.

A partir de ce tableau, on demande de tracer la courbe représentative de la fonction en admettant que cette courbe soit régulière. Encore une fois, dans ce manuel on renforce l'idée de construire la courbe d'une fonction de façon point par point.

## II.3.2 Synthèse sur l'utilisation du tableau de valeurs

Examinons maintenant, comme nous avons déjà fait pour les manuels précédents, les propriétés des tableaux de valeurs utilisés.

| | $V_{nombre}$ | $V_{nature}$ | $V_{ordre}$ | $V_{pas}$ | $V_{min/max}$ | $V_{sym}$ | $V_{hr/vt}$ | Compléments |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Cours** | 7 | ent déc | croiss | | borne [-2 ; 1] | | H | lié définition d'1 fonct. avec $f(x) = 2x^2 - 1$ |
| **TP** | 9 | entiers | croiss | 1 | borne [0 ; 8] | | H | avec un dessin géométrique |
| | 9 | ent 1/2ent | croiss | 0,5 | borne [-2 ; 2] | oui | H | avec $f(x) = x^3 - 3x$ (compléter le tvl) |

**Tableau n 4: Caractéristiques des tableaux de valeurs dans le cours de Pythagore**

Nous constatons que, comme dans le manuel Hyperbole,  le tableau de valeurs est beaucoup moins utilisé que dans le manuel Fractale.

Le nombre de variables est 7 et 9 et on utilise les nombres entiers et décimaux comme variable. Chaque fois on précise les ensembles de définition et $V_{mix/man}$ correspond toujours aux bornes des intervalles. Si l'intervalle de définition est symétrique alors les valeurs du tableau sont aussi symétriques par rapport à l'origine.

A propos de la calculatrice : on ne demande pas de l'utiliser pour compléter ou construire un tableau de valeurs et on n'utilise pas non plus un tableau de valeurs fait par l'écran d'une calculatrice.

Concernant les tâches, dans la partie cours, le tableau de valeurs est utilisé pour monter la relation entre les images et les antécédents. Par contre, dans la partie TP, le tableau de valeurs est utilisé (et demandé) pour passer du registre algébrique au registre graphique.

On ne questionne jamais sur le fait qu'un tableau de valeurs ne donne que des informations partielles sur une fonction et qu'à un tableau de valeurs on peut correspondre plusieurs fonctions donc plusieurs représentations graphiques. On traite le tableau de valeurs comme s'il présente la fonction totalement et chaque fois on demande de tracer « la courbe représentative de la fonction » à partir d'un tableau de valeurs (renforçant ainsi l'idée du tracé point par point).

Le tableau de valeurs n'est jamais utilisé comme un registre d'entrée.

### II.3.3 Synthèse sur l'utilisation du tableau de variations

Le tableau de variations est apparu dans l'étude du sens de variation d'une fonction et il a été construit à partir d'une courbe. Aucune explication n'est donnée sur sa construction. Nous avons constaté que le tableau de variations, comme le tableau de valeurs, n'est jamais utilisé comme registre d'entrée dans ce manuel.

Aucune conversion liée au tableau de variations n'est étudiée ni explicitée dans ce manuel.

## II.4 Déclic Maths 2$^{\text{nde}}$

Ce manuel présente douze chapitres dont trois portent sur l'étude des fonctions :

- Fonctions : généralités
- Fonctions affines
- Fonctions de référence

Chaque chapitre est construit de façon similaire et structuré en quatre parties : Activité, Les problèmes résolus, Les travaux dirigés et Les exercices.

## II.4.1 Chapitre : Fonctions : généralités

***Les activités***

Il y a trois activités introductives qui intitulent ainsi :

- 1. « En fonction de » : représentation graphique
- 2. Température en fonction de l'heure
- 3. Courbe à l'écran d'une calculatrice

Remarquons ici que dans toutes ces activités on n'utilise que le registre graphique, ce qui montre que les auteurs accordent une grande importance à ce registre dans l'introduction de la notion de fonction.

***Le cours***

Cette partie est divisée en trois :

- *Notion de fonction et courbe représentative*

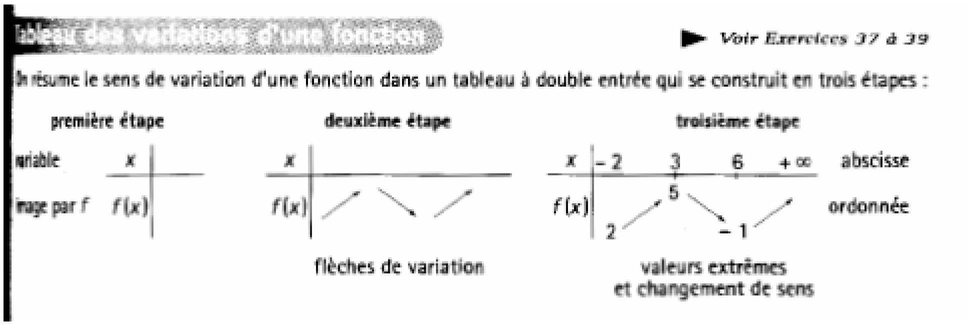
Dans ce paragraphe, on donne la définition d'une fonction et la définition de la courbe représentative :

> **Fonction** : D étant une partie de l'ensemble des réels, lorsque, à chaque réel x de D, on associe un seul réel y, on définit une fonction f sur l'ensemble D.
> **Courbe représentative** : Dans un repère, la courbe représentative de la fonction f est l'ensemble des points M(x ; y) : l'abscisse x décrit l'ensemble de définition D ; et l'ordonnée y est l'image de x par f. Autrement dit, $x \in D$ et $y = f(x)$.

Après avoir donné la définition d'une fonction et la courbe représentative, on donne une courbe avec deux zooms différents qui sont tracés à l'écran d'une calculatrice. A côté de ces courbes, un tableau de valeurs est donné à l'écran d'une calculatrice mais sans aucune explication.

- *Variation – Extremum*

On étudie ici le sens de variation et les extremums d'une fonction. Ensuite, pour la mise en pratique de ces notions, on donne la représentation graphique d'une fonction sur laquelle on trace des flèches ascendantes et descendantes pour visualiser où la fonction est croissante ou décroissante. Notons que c'est le seul manuel où on essaie de visualiser le passage d'une représentation graphique à un tableau de variations. En effet, on passe tout de suite au tableau de variations de cette fonction. On donne des précisions sur la construction d'un tel tableau. Voici ce que les auteurs disent pour cela :




C'est le seul manuel qui parle explicitement de la construction d'un tableau de variations.

- *Résolution graphique*

On étudie la résolution des équations et des inéquations à partir du registre graphique. On illustre la résolution des différentes équations (f(x) = k, f(x) = 0 et f(x) = g(x)) et inéquations (f(x)>k, f(x)>0 et f(x)>g(x)) sur différentes représentations graphiques.

Ensuite, à partir de deux exemples résolus, on donne les méthodes pour résoudre graphiquement des équations et des inéquations. On n'aborde jamais la résolution de celles-ci algébriquement.

***Les problèmes résolus***

On donne deux problèmes résolus qui s'intitulent « Courbe point par point » et « Optimisation ».

Dans le premier, on donne deux expressions algébriques ($f(x) = -1/4x^2 + x + 1$ sur IR et $g(x) = \frac{-4x-3}{x^2+1}$ sur [-4 ; 7]) et on demande de tracer point par point les courbes représentant ces fonctions. Pour tracer ces courbes, on donne la méthode suivante :

> On programme la fonction (…)
> On utilise le tableau de valeurs de 1 en 1 et on place les points correspondants dans un repère.
> On joint les points par une courbe « lissée ».

Remarquons que cet exercice renforce l'idée de tracer la courbe point par point.

***Travaux dirigés***

On donne quatre travaux dirigés. Dans tous, c'est le registre graphique qui est registre d'entrée. Aucun de ces exercices n'utilise les tableaux de valeurs ou de variations.

### II.4.2 Synthèse sur l'utilisation du tableau de valeurs

| | $V_{nombre}$ | $V_{natur}$ | $V_{ordre}$ | $V_{pas}$ | $V_{min/max}$ | $V_{sym}$ | $V_{hr/vt}$ | **Compléments** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Problème résolu** | 12 | ent | croiss | 1 | IR et [-4 ; 7] | | V | Fait par l'écran d'une calculatrice (2 tableaux ensembles) |
| | 7 | ent | croiss | 1 | | | V | Fait par l'écran d'une calculatrice (problème optimisation) |
| **Travaux dirigés** | 7 | ent | croiss | 1 | | | V | Fait par l'écran d'une calculatrice (pour la solution d'1 équ) |

**Tableau n 5: Caractéristiques des tableaux de valeurs dans le cours de Déclic**

Nous voyons que comme dans les manuels Hyperbole et Pythagore, le tableau de valeurs est beaucoup moins utilisé que dans le manuel Fractale, même si ce manuel consacre, comme Fractale, trois chapitres sur l'étude des fonctions. Une autre remarque importante est que le tableau de valeurs n'est pas utilisé pendant les parties activités et cours.

Tous les tableaux de valeurs qu'on utilise dans ce manuel sont tracés à l'écran d'une calculatrice et on n'utilise jamais un exercice où le tableau de valeurs est un registre d'entrée. Le tableau de valeurs n'est qu'un outil pour faire tracer la représentation graphique d'une fonction de façon « point par point ».

Il n'y a ni un paragraphe spécifique sur le tableau de valeurs, ni d'explication sur ses limites ou ni d'explication sur la conversion entre le tableau de valeurs et un autre registre. Une autre remarque est que dans la plupart du cas, c'est le registre graphique qui est utilisé, ce qui rend encore plus surprenant le fait qu'il y ait si peu d'utilisation du tableau de valeurs.

### II.4.3 Synthèse sur l'utilisation de tableau de variations

C'est le seul manuel qui donne des étapes sur la construction d'un tableau de variations. En plus, on illustre les flèches sur une représentation graphique pour montrer d'où viennent ces flèches. Par contre, aucune connaissance n'est donnée sur la conversion d'un tableau de variations à un autre registre.

Pendant les travaux pratiques et travaux dirigés la conversion entre tableau de variations et représentation graphique est demandée à plusieurs reprises.

## II.5 Conclusion

Nous récapitulons les résultats dans le tableau ci-dessous concernant l'utilisation du tableau de valeurs et du tableau de variations pour cette partie de notre étude.

| | **Tableau de valeurs (Tvl)** | **Tableau de variations (Tvr)** |
|---|---|---|
| **Fractale** | - une définition et des paragraphes spécifiques<br>- explication sur ses limites<br>- utilisation dans le contexte intra et extra maths<br>- utilisation comme registre d'entrée dans plusieurs activités et exercices<br>- utilisation des tableaux fait par l'écran d'une calculatrice | - un paragraphe spécifique mais pas d'explication sur sa construction |
| **Hyperbole** | - paragraphe spécifique mais pas d'explication sur ses limites<br>- utilisation très peu et seulement dans le contexte extra mathématique<br>- utilisation d'un tableau qui ne définit pas une fonction<br>- pas de tableau fait par l'écran d'une calculatrice | - pas d'explication spécifique |
| **Pythagore** | - pas de paragraphe spécifique<br>- utilisation très peu et aucune exercice où le tableau de valeurs est registre d'entrée<br>- utilisation seulement dans le contexte intra mathématique<br>- pas de tableau fait par l'écran d'une calculatrice | - un paragraphe spécifique mais pas d'explication sur sa construction |
| **Déclic** | - pas de paragraphe spécifique<br>- très peu utilisé et aucun exercice où le tableau de valeurs est registre d'entrée<br>- utilisation seulement dans le contexte intra-mathématique pour tracer « la courbe point par point ».<br>- utilisation seulement des tableaux fait par l'écran d'une calculatrice | - un paragraphe spécifique et des explications sur sa construction (étape par étape)<br>- illustration des flèches sur une courbe |

A la lecture de ce tableau : pour le tableau de valeurs,

- Remarquons que l'utilisation du tableau de valeurs est très différente suivant le manuel. Dans certains (Fractale), son rôle est très important dans l'étude des fonctions et ainsi il y consacre des paragraphes spécifiques avec sa définition, alors que dans d'autres (Hyperbole, Pythagore et Déclic) son rôle est très faible : soit on l'utilise seulement dans le contexte intra mathématique (Pythagore, Déclic)), soit seulement dans le contexte extra mathématique sur un ensemble fini (Hyperbole).
- Dans la moitié des manuels analysés (Pythagore, Déclic), le tableau de valeurs n'est jamais utilisé comme registre d'entrée dans une activité, dans un exercice ou dans un problème.
- Seul, Fractale essaie de monter qu'un tableau de valeurs ne donne que des informations partielles et que le tableau n'a aucune raison, a priori, de contenir des valeurs remarquables de la fonction au regard de ses variations. Dans les autres manuels, aucune précision n'est donnée sur son rôle et ses limites pour l'étude des fonctions.
- Dans Fractale, on utilise à la fois le tableau de valeurs classique et le tableau de valeurs fait par l'écran d'une calculatrice. Dans Déclic, on l'utilise seulement fait par l'écran d'une calculatrice, alors que dans les autres, on n'utilise jamais un tableau de valeurs fait par l'écran d'une calculatrice.
- Au niveau des variables didactiques relatives aux tableaux de valeurs : $V_{nombr}$ est comprise entre 6 et 9 quand on reste dans un cotexte intra-mathématique et on utilise plutôt les nombres entiers comme valeurs de la variable et celles-ci sont en général dans l'ordre croissant. $V_{max/min}$ correspond toujours aux bornes des intervalles si l'ensemble de définition est précisé. Enfin, on utilise en général un pas régulier dans ce contexte. Dans des contextes extra-mathématiques, on peut voir que $V_{nombr}$ atteint jusqu'à 20 valeurs.

Pour le tableau de variations :

- Trois manuels (Fractale, Pythagore et Déclic) consacrent un paragraphe spécifique au tableau de variations, par contre seul Déclic donne des explications sur sa construction.
- Aucun manuel ne donne de précision sur les codes et les codages qu'on utilise dans un tableau de variations. Seul, dans Déclic, on essaie de visualiser le passage d'une représentation graphique à un tableau de variations en traçant des flèches ascendantes et descendantes sur une représentation graphique.

Nous récapitulons les résultats de notre analyse concernant les tâches de conversion liées à ces deux objets :

| | Fractale | Hyperbole | Pythagore | Déclic |
|---|---|---|---|---|
| **A→Tvl** | oui | non | oui<br>(implicite) | oui<br>(implicite) |
| **Tvl→A** | oui | non | non | non |
| **G→Tvl** | oui | non | non | non |
| **Tvl→G** | oui<br>(paragraphe spécifique et explication détaillée) | non | oui<br>(implicite) | oui<br>(implicite) |
| **Tvl→Tvr** | oui<br>(paragraphe spécifique et explication détaillée) | non | non | non |
| **Tvr→Tvl** | oui<br>(paragraphe spécifique et explication détaillée) | non | non | non |
| **A→Tvr** | oui | non | oui | non |
| **Tvr→A** | non | non | non | non |
| **G→Tvr** | oui<br>(paragraphe spécifique et explication détaillée) | oui | oui<br>(implicite) | oui |
| **Tvr→G** | oui<br>(paragraphe spécifique et explication détaillée) | oui<br>(paragraphe spécifique avec exp.) | non | oui |

A la lecture de ce tableau ; pour le tableau de valeurs ;

- Remarquons tout d'abord qu'aucune conversion liée au tableau de valeurs n'est explicitée dans trois manuels (Hyperbole, Pythagore et Déclic). En plus, aucune conversion liée à cet objet n'apparaît dans Hyperbole. Celles qui apparaissent dans Pythagore et Déclic sont des sous-taches entre le registre algébrique et le registre graphique pour arriver à tracer « point par point » la représentation graphique d'une fonction. En effet, le tableau de valeurs est utilisé dans ces deux manuels comme une aide et on n'étudie en aucun lieu le fait qu'on peut tracer plusieurs représentations graphiques à partir d'un tableau de valeurs.

- Seule Dans Fractale, on étudie toutes les conversions liées au tableau de valeurs et on donne aussi des connaissances nécessaires pour certains d'entre elles qui apparaissent pour la première fois en Seconde (Tvl → G, Tvl → Tvr, Tvr → Tvl)

Pour le tableau de variations ;

- Seule la conversion « G → Tvr » est étudiée dans tous les manuels, c'est ce qui est normal, puisque le tableau de variations est introduit dans tous à partir du registre graphique.
- La conversion « A → Tvr » apparaît dans seulement deux des manuels (Fractale, Pythagore) avec les techniques d'étude.
- La conversion « Tvr → G » est demandée et explicitée (avec des connaissances nécessaires : à un tableau de variations, on peut faire correspondre plusieurs représentations graphiques) dans deux manuels (Fractale et Hyperbole), elle est seulement demandée dans Déclic sans explication, alors que dans Pythagore, cette conversion n'apparaît en aucun lieu. On constate ainsi un écart très important entre les intentions des programmes et leur application dans ce manuel, puisque cette conversion est explicitement demandée dans le programme[13].
- Seul Fractale étudie et explicite toutes les conversions possibles en Seconde. Ajoutons également que les conversions entre le tableau de valeurs et le tableau de variations apparaissent seulement dans ce manuel avec les connaissances nécessaires.

# III. Deuxième volet : Etude des exercices

## III.1 Répartition des exercices selon leur registre d'entrée

Pour l'analyse des exercices, nous les avons tout d'abord classés selon leur registre d'entrée. Nous avons pris en compte seulement les quatre registres principaux (algébrique, graphique, tableau de valeurs et tableau de variations). Les autres registres (langue naturelle, géométrie, …) sont regroupés ensemble dans « Autres ». Le tableau ci-dessous récapitule les résultats ainsi obtenus :

| Manuel | Nombres exercices | A | | G | | Tvl | | Tvr | | Autres (langue, géo,…) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Nbr | % | Nbr | % | Nbr | % | Nbr | % | |
| Fractale | 151 | 55 | **36** | 38 | **25** | 9 | **6** | 23 | **15** | 28 |
| Hyperbole | 68 | 20 | **29** | 19 | **28** | 2 | **3** | 7 | **10** | 20 |
| Pythagore | 92 | 53 | **58** | 14 | **15** | 0 | **0** | 6 | **7** | 19 |
| Déclic | 79 | 25 | **32** | 27 | **34** | 2 | **3** | 6 | **8** | 19 |

[13] « Dessiner une représentation graphique compatible avec un tableau de variations » (Programme de Seconde, 2000)

**Tableau n 5: Répartition des exercices selon leur registre d'entrée.**

Nous constatons que dans Pythagore la plupart des exercices (58 %) ont le registre algébrique comme registre d'entrée, contre 15 % des exercices avec le registre graphique. On peut donc dire que ce manuel est encore très algébrique et on observe ainsi un écart important avec la mise en place de nouvelle tendance du programme. Dans les trois autres manuels, l'entrée algébrique représente environ un tiers des exercices et arrive quasiment à égalité avec l'entrée graphique.

Au niveau du registre graphique, c'est Déclic qui l'utilise beaucoup par rapport aux autres manuels (34 % contre 15, 25, et 28 %). Le registre graphique était d'ailleurs central dans ce manuel pendant la partie « cours ».

Le tableau de valeurs n'apparaît pas dans Pythagore comme registre d'entrée, alors que Fractale consacre deux fois plus d'exercices avec entrée par un tableau de valeurs par rapport aux autres deux manuels. Ces pourcentages restent cependant assez faibles.

Les tableaux de variations apparaissent globalement plus souvent dans les manuels comme registre d'entrée que les tableaux de valeurs (toujours plus du double). Ils sont surtout utilisés dans Fractale, où ils représentent un fort pourcentage (21% au total pour les tableaux de valeurs et de variations). Ce résultat peut surprendre tant le tableau de variations a coutume d'être demandé comme résultat d'une tâche de l'élève et peu comme registre d'entrée. On voit donc que cette nouvelle tendance des programmes de faire un travail spécifique sur le tableau de variations a l'air d'avoir été reprise par la plupart des manuels.

Nous passons maintenant à l'analyse des exercices où un tableau de valeurs (puis un tableau de variations) apparaît explicitement. Nous nous attacherons à déterminer les caractéristiques des tableaux en jeu et les tâches associées à leur utilisation.

## III.2 Analyse des exercices utilisant le tableau de valeurs comme registre d'entrée

Dans tous les manuels que nous avons étudiés, les exercices dans lesquels apparaît un tableau de valeurs se divisent en deux catégories : soit le tableau de valeur est donné (au moins partiellement dans l'énoncé, et détermine donc le registre d'entrée) soit le tableau de valeurs est demandé comme élément intermédiaire entre la donnée de l'expression algébrique et le tracé du graphe représentatif de la fonction (tâche classique). Comme le deuxième type de tâche est tout à fait classique et connu, nous avons focalisé notre travail sur les seuls exercices, où le registre tableau de valeurs est utilisé comme registre d'entrée, ces tâches nous semblent en effet, beaucoup plus emblématique des changements apportés par les programmes les plus récent sur l'enseignement de la notion de fonction.

### III.2.1 Fractale Maths 2$^{nde}$

Dans les exercices de ce manuel, comme dans la partie « cours », un nombre important d'exercices utilisent un tableau de valeurs :

| | $V_{nmbr}$[14] | $V_{nat}$ | $V_{ordr}$ | $V_{pas}$ | $V_{mn/mx}$ | $V_{sym}$ | $V_{hr/vt}$ | **Tâches et compléments** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Chapitre: Généralités sur les fonctions | 7 (4) | ent, déc,fra | Pas ordre | | Df inconnu | | H | Conversion A → Tvl (compléter un tableau de valeurs) |
| | 6 (4) | ent, irra | Pas ordre | | | | H | Conversion G → Tvl (compléter un tableau de valeurs) |
| | 6 (4) | ent, irra | Par ordre | | | | H | Conversion G → Tvl (compléter un tableau de valeurs) |
| | 6 (2) | ent | | | | | H | Conversion G → Tvl (compléter un tableau de valeurs) |
| | 5 | ent | croiss | | borne [-2 ; 7] | | H | Conversion Tvl →G (donner **plusieurs** repr. graphiques) |
| | 5 | ent | croiss | | borne [-2 ; 7] | | H | Conversion Tvl →G (donner **plusieurs** repr. graphiques) |
| | 5 | ent, déc | croiss | | borne [-2 ; 7] | | H | Conversion Tvl →G (donner **plusieurs** repr. graphiques) |
| | 7 | ent, ½ ent | croiss | 0,5 | borne [0 ; 3] | | V | Conversion G ↔ Tvl (associer 2 courbes avec 2 tvl) |
| | 6 | ent | croiss | 2 | | | H | Conversion G ↔ A ↔ Tvl (associer 3 courbes, formules et tvl) |
| Chaptr : Sens de var. | 4 | ent | croiss | 1 | | | H | Conversion Tvl → Tvr (2 exercices avec 2 tableaux) |
| | 7 | ent, ½ ent | croiss | 0,5 | [0 ; 4] | | V | Conversion A ↔ G ↔ Tvl (associer 4 formules–courbes–tvl) |
| Chapitre : Fonctions référence | 6 | ent | croiss | 2 | | | H | Compléter le tableau donné selon la parité (2 tableaux de valeurs) |
| | 3 | ent | croiss | | | | H | Compléter le tvl sachant que la fonction est affine (4 tvl) |
| | 3 | ent | croiss | | | | H | Reconnaître la fonction affine à partir d'un tableau (4 tvl) |
| | 8 | déc | croiss | 0,2 | | | V | Déterminer la formule à partir d'une courbe et d'un tvl (sachant que $f(x) = ax^2 + bx + c$) |

**Tableau n°6: Caractéristiques des tableaux de valeurs dans les exercices de Fractale**

[14] Pour $V_{nbr}$, a(b) : le tableau comporte a colonnes dont seules b sont données, les autres doivent être complétées par l'élève.

Comme dans la partie « cours », le nombre de variables est relativement constant (en moyenne 6 ou 7) et on utilise plutôt les nombres entiers comme valeurs de la variable, en général dans l'ordre croissant et avec un pas régulier (sauf pour les tableaux incomplets).

Les ensembles de définition ne sont pas toujours précisés mais dans le cas où ils le sont, $V_{min/max}$ correspond toujours aux bornes des intervalles. Puisqu'il n'y a pas d'intervalle de définition symétrique dans cette partie, on ne peut pas envisager de symétrie des valeurs du tableau.

Enfin, il n'y a pas de tableau de valeurs tracé à l'écran d'une calculatrice dans cette partie.

Concernant les tâches associées, on demande toutes les types de tâches de conversion qui sont explicités dans la partie cours, à savoir « A $\rightarrow$ Tvl », « G $\rightarrow$ Tvl », « Tvl $\rightarrow$ G », « G $\leftrightarrow$ Tvl », « A $\leftrightarrow$ G $\leftrightarrow$ Tvl », « Tvl $\rightarrow$ Tvr ». Notons que pour les conversions « Tvl $\rightarrow$ G » et « Tvl $\rightarrow$ Tvr », on demande chaque fois de donner deux (ou plusieurs) représentations graphiques ou tableaux de variations (qui sont des registres d'arrivées). Ainsi, on veut faire comprendre encore une fois que le tableau de valeurs est une représentation partielle.

Dans le chapitre « Fonctions de référence », on voit que les types de tâches sont assez différents. Il s'agit soit de compléter un tableau de valeurs connaissant une propriété de la fonction (2 tâches de traitement dans le registre tableau de valeurs de certaines propriétés des fonctions, être paire ou être affine) soit de trouver l'expression algébrique d'une fonction dont on connaît un tableau de valeurs (voire aussi la courbe) et dont on sait qu'elle est affine ou du second degré (2 exercices). Ce dernier type de tâche peut être vu comme une tâche de conversion, mais il est bien particulier dans la mesure où il se limite à des fonctions bien particulières.

### III.2.2 Hyperbole Math 2^nde^

Voici les caractéristiques des tableaux de valeurs utilisées dans les exercices de ce manuel :

| | $V_{nombr}$ | $V_{nat}$ | $V_{ordr}$ | $V_{pas}$ | $V_{mn/mx}$ | $V_{sym}$ | $V_{hr/vt}$ | Tâches et compléments |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Chapitre : Notion de fonction | 8 | ent, déc, | croiss | | | | H | Conversion A → Tvl (compléter un tableau de valeurs) |
| | 8 | ent, déc. | croiss | 0,2 | | | H | Dire si le tableau définit une fonction (contexte concret) |
| | 8 | ent, déc. | croiss | | | | V | Dire si le tableau définit une fonction (contexte concret) |
| | 7 | déc | croiss | 0,01 | | | H | Conversion A → Tvl (compléter un tableau de valeurs) |
| Chapitre : Fonctions de référence | 6 | ent, frac, ir | Pas ordre | | | | H | Dire s'il peut s'agir de la f(x) = x² (2 exercices avec 2 tvl) |
| | 6 | déc | Pas ordre | | | | H | Reconstituer le tableau sachant que f(x) = x² |
| | 6 | ent, frac, ir | Pas ordre | | | | H | Dire s'il peut s'agir de la f(x) = 1/x (2 exercices avec 2 tvl) |
| | 5 | ent | croiss | | | | H | Déterminer la proportionnalité et estimer certaines valeurs |
| | 4 (2) | ent | | | | | H | Conversion A → Tvl (compléter le tvl, contexte concret) |

**Tableau n°7: Caractéristiques des tableaux de valeurs dans les exercices de Hyperbole**

Le nombre de variables est relativement constant (en moyenne 6 ou 8) et on utilise en général les nombres entiers et décimaux comme valeurs de la variable et celles-ci sont en général dans l'ordre croissant. Par contre, dans la plupart des tableaux de valeurs, on n'utilise pas un pas régulier. Puisque les ensembles de définition ne sont jamais précisés dans cette partie, on ne peut pas envisager de $V_{max/min}$ ni de $V_{sym}$.

Il n'y a pas non plus de tableaux de valeurs tracés à l'écran d'une calculatrice

Beaucoup des caractéristiques précédentes s'expliquent par le fait que les tableaux de valeurs dans ce manuel sont essentiellement utilisés dans des contextes extra-mathématiques.

Concernant les tâches associées, on demande seulement la conversion « A → Tvl » pour arriver à conjecturer certaines propriétés de la fonction (sens de variation, maximum, minimum, etc.) ou pour vérifier les résultats déjà trouvés. Les autres tâches sont des tâches de traitement qui peuvent être catégorisé en deux groupes : Dire si le tableau définit une fonction (dans un contexte concret avec un ensemble fini) et dire s'il peut s'agir l'une des fonctions de référence (carrée, inverse, etc.). Dans deux cas, le tableau de valeurs est utilisé comme un outil pour présenter un ensemble de nombres.

### III.2.3 Pythagore Maths 2nde

| | $V_{nmbr}$ | $V_{nat}$ | $V_{ordr}$ | $V_{pas}$ | $V_{mn/mx}$ | $V_{sym}$ | $V_{hr/vt}$ | **Tâches et compléments** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Chapitre : Fonctions | 7 | ent | croiss | 1 | borne [-3 ; 3] | Oui (à 0) | H | Compléter le tvl à partir du contexte géométrie pour tracer la courbe **point par point** |

**Tableau n°8: Caractéristiques des tableaux de valeurs dans les exercices de Pythagore**

Dans ce manuel, il n'y a pas d'exercice où le tableau de valeurs apparaît en tant que registre d'entrée. On utilise une fois un tableau de valeurs à partir du contexte géométrique pour arriver à tracer la courbe « point par point ». Puisqu'il s'agit de tracer la courbe « point par point », ce tableau est très complet : on utilise toutes les valeurs entières de l'ensemble de définition qui est symétrique par rapport à l'origine.

### III.2.4 Déclic Maths 2nde

| | $V_{nombr}$ | $V_{nat}$ | $V_{ordr}$ | $V_{pas}$ | $V_{mn/mx}$ | $V_{sym}$ | $V_{hr/vt}$ | **Tâches et compléments** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Chapitre : Fonctions généralité | 15 | ent | croiss | 10 | | | V | Conversion Tvl $\rightarrow$ G (Tracer une courbe **lissée**) (contexte concret : âge/diamètre) |
| | 14 | ent | croiss | 10 | | | H | Conversion Tvl $\rightarrow$ G (Tracer une courbe **lissée**) (contexte en biologie) |
| | 8 | ent | croiss | 8 | | | H | Conversion A $\rightarrow$ Tvl (Compléter le tvl pour tracer 1 G) (contexte concret : vitesse/coût) |
| Chp. f.aff | 6 | ent | croiss | | | | H | Conversion Tvl $\rightarrow$ G (Tracer une courbe **lissée**) (contexte concret, interpolation) |

**Tableau n°9: Caractéristiques des tableaux de valeurs dans les exercices de Déclic**

Dans cette partie de ce manuel, comme dans la partie « cours », le tableau de valeurs n'est qu'un outil pour faire tracer la représentation graphique d'une fonction « point par point » ou de façon « lissée », toujours en référence à un contexte concret. On demande donc seulement soit la conversion « A $\rightarrow$ Tvl » ou soit la conversion «Tvl $\rightarrow$ G ».

Puisqu'il s'agit toujours du contexte concret, le nombre de valeurs de la variable peut atteindre jusqu'à 15 valeurs avec toujours des entiers donnés dans l'ordre croissant.

## III.3 Analyse des exercices utilisant (ou demandant) le tableau de variations

Pour le tableau de variations, nous prendrons en compte les exercices où soit on demande de construire un tableau de variations soit on donne un tableau de variations et à partir de là on demande de passer à un autre registre ou de répondre à certains questions.

| | Fractale | Hyperbole | Pythagore | Déclic |
|---|---|---|---|---|
| A → Tvr | 4 | | | |
| G → Tvr | 6 | 4 | 9 | 6 |
| Tvr → G | 6 | 2 | 3 | 4 |
| Tvl → Tvr | 2 | | | |
| Tvr → Tvl | 2 | | | |
| Tâches de traitements | 16 | 5 | 3 | 1 |

**Tableau n°10 : Nombre des exercices concernant le tableau de variations**

Toutes les conversions apparues et étudiées dans la partie cours sont aussi demandées dans cette partie de chaque manuel, sauf dans Pythagore où la conversion « A → Tvr » n'est pas demandée dans cette partie et réciproquement aucune tâche de conversion non vue en cours n'est abordée, sauf dans Pythagore, où la conversion « Tvr → G » apparaît pour la première fois.

Notons également que certaines tâches de conversion n'apparaissent ni en cours ni en exercices dans certains manuels (A → Tvr ni dans Hyperbole ni dans Déclic, Tvl → Tvr et Tvr → Tvl ni dans Hyperbole, ni dans Pythagore, ni dans Déclic).

Dans Fractale et Hyperbole, la conversion « Tvr → G » est demandée chaque fois sous la forme « dresser deux (ou plusieurs) représentations graphiques », alors que dans Pythagore et Déclic elle est demandée ainsi : « dessiner la courbe représentative d'une fonction ». Nous pensons que cette formulation peut induire qu'il y a une seule courbe correspondante à un tableau de variations.

Quant aux tâches de traitement, c'est Fractale qui utilise beaucoup plus d'exercices que les autres manuels. Ainsi, dans ce manuel, certaines tâches apparaissent pour la première fois en exercice, par exemple « donner le tableau de variations d'une fonction construite à partir d'une autre fonction dont on connaît le tableau de variations ». Alors que dans les autres manuels, il s'agit seulement de répondre à certains questions (ensemble de définition, extrema, ensemble des images, etc.).

# CONCLUSION

Nous venons de voir comment sont mises en place les grandes tendances du nouveau programme 2000 de $2^{nde}$ dans différents manuels. Nous avons ainsi constaté une grande diversité dans ce qui est proposé dans l'introduction à la notion de fonction, il existe donc un écart important entre les intentions des programmes et leur réalisation dans certains manuels. Il apparaît assez net que le manuel Fractale se distingue par une plus grande adéquation avec les intentions du programme, dans la mesure où il se particularise à beaucoup de points de vue par une utilisation plus riche des registres tableaux. Par contre, Déclic est le seul manuel à aborder explicitement des questions sur la construction des tableaux de variations. Ainsi, si l'ensemble des manuels offre une variété importante de situations où les tableaux de valeurs et de variations sont utilisés, il n'y en a pas un qui les recouvre toutes, même si Fractale est largement à la pointe sur un maximum de points.

Par ailleurs, le registre graphique semble être privilégié dans Déclic alors que Pythagore privilégie plutôt le registre algébrique, les deux autres ayant une approche assez équilibrée vis-à-vis de ces deux registres.

En ce qui concerne les tableaux de valeurs et de variations, leur utilisation est très différente suivant les manuels. Certains leur donnent un statut important alors que pour d'autres, leur rôle est très faible.

Seul, le manuel Fractale essaie de montrer qu'un tableau de valeurs ne donne que des informations partielles et que ce type de tableau n'a aucune raison a priori de contenir des valeurs remarquables de la fonction au regard de ses variations, alors que dans les autres, aucune précision n'est donnée sur son rôle et ses limites pour l'étude des fonctions. D'autre part, dans la moitié des manuels analysés, le tableau de valeurs n'est jamais utilisé comme registre d'entrée dans la partie « cours ». De plus, seulement dans Fractale, le tableau de valeurs apparaît à la fois dans des contextes intra et extra mathématiques, alors que dans les autres manuels on l'utilise seulement dans l'un des deux contextes.

Au niveau des variables didactiques relatives aux tableaux de valeurs : Dans des contextes intra-mathématique, $V_{nombr}$ est comprise entre 6 et 9, on utilise plutôt les nombres entiers comme valeurs de la variable et celles-ci sont en général dans l'ordre croissant. $V_{max/min}$ correspond toujours aux bornes des intervalles si l'ensemble de définition est précisé. Enfin, on utilise en général un pas régulier. Dans des contextes extra-mathématiques, on peut voir que $V_{nombre}$ atteint jusqu'à 20 valeurs.

Pour le tableau de variations, seul Déclic donne des explications sur sa construction, en revanche aucun manuel ne donne de précision sur les codes et les codages qu'on utilise dans un tableau de variations.

Les exercices de conversions relatifs aux tableaux de valeurs et de variations tiennent une place plus ou moins grande selon les manuels : absent dans Pythagore, alors que seul Fractale aborde tous les types de conversions possibles en seconde. Dans les autres manuels, seules certaines conversions classiques sont proposées. Cette relative absence, dans des manuels scolaires, des exercices de conversion montre que ce type d'exercice peut avoir du mal à vivre dans l'enseignement. Ainsi il semble que les changements de registres ne sont pas systématiquement intégrés dans les manuels. Il reste à savoir ce que les enseignants font réellement travailler à leurs élèves de ces conversions. Cette question est fondamentale si on se réfère à la position de Duval (1993) pour qui les activités de conversion sont essentielles dans le processus de conceptualisation des objets mathématiques, et tout particulièrement pour la notion de fonction.

Notons pour finir que notre étude de manuels a été faite en 2001. Depuis, une nouvelle série de manuels est sortie en juin 2004. Un survol rapide de ces nouveaux manuels semble montrer que les choses ont évolué dans le sens d'une plus grande prise en compte des tableaux mais nous n'avons pas fait cette étude.

Maintenant que nous avons constaté la difficulté et la diversité de mise en place des certains nouveautés du programme dans les manuels, il nous reste à avoir une idée plus précise des choix didactiques effectués par les enseignants sur l'enseignement de la notion de fonction. Quel est la distance entre ces choix des professeurs et ce qui apparaît dans le programme et dans les manuels ? Observe-t-on une variabilité de choix entre les enseignants ? C'est ce questionnement que nous abordons dans le chapitre suivant.

# CHAPITRE B3

# Questionnaire des professeurs

## I. Introduction

Comme nous l'avons constaté dans l'analyse écologique de l'évolution des programmes, plusieurs systèmes de contraintes institutionnelles ont pu être vécus par les enseignants de $2^{nde}$ (en position d'élève ou de professeur). Or comme Chevallard (1995) le souligne, des contraintes propres à des rapports institutionnels passés peuvent influencer le rapport personnel actuel d'enseignants aux objets à enseigner :

> « R(X, O) (le rapport « personnel » de X à un objet d'enseignement O) n'est jamais parfaitement conforme à tel rapport institutionnel R(I, O) donné : la personne X est quasiment toujours, dans une certains mesure, un mauvais sujet de I, parce que son rapport s'est formé par l'intégration, au fil du temps, des influences exercées par les divers rapports institutionnels auxquels elle a été assujettie »

Ainsi il est possible que certaines des organisations didactiques et mathématiques au sein desquelles s'est inscrit l'objet du savoir enseigné : la notion de la fonction et ses registres de représentation sémiotique, plus particulièrement le tableau de valeurs et le tableau de variations, aux différentes périodes « passées » influencent les professeurs de Seconde pour leur enseignement et que celles-ci se constituent pour eux en autant de choix possibles d'enseignement ou d'obstacles.

Le questionnaire que nous avons élaboré a donc pour principal objectif d'interroger les professeurs sur leurs choix pour l'enseignement de la notion de fonction, sur l'utilisation du registre tableaux (tableau de valeurs et tableau de variations), et sur les connaissances mathématiques et didactiques sous-jacentes à ces choix.

## II. Analyse a priori

Tout d'abord nous demandons quelques renseignements qui nous permettent de situer le professeur : son ancienneté et les manuels qu'il utilise.

Ces questions nous permettent d'avoir des idées sur les pratiques des enseignants en les comparant avec notre analyse des manuels. En effet, l'analyse des manuels qui a montré que ceux-ci sont très différents pour l'étude des fonctions. Or, nous connaissons l'importance des manuels pour les professeurs : nous savons que si un type de tâche n'apparaît pas dans les manuels, il a peu de chance de vivre dans la classe. Nous pensons donc que les choix d'exercices à proposer risquent d'être différents suivant les manuels utilisés par la classe ou l'établissement.

Ensuite nous avons distingué les renseignements que nous pensons obtenir en trois catégories:

### II.1 Des renseignements sur les organisations mathématiques mises en place par chaque professeur autour de la notion de fonction (questions 2 et 3)

- - nombre de chapitre et leurs titres
- - lien avec d'autres chapitres

L'analyse des manuels nous a montré que dans certains manuels, il y a deux chapitres pour l'étude des fonctions alors que dans d'autres il y en a trois ou même quatre. Les réponses à ces questions nous permettent de voir, d'une part, si le professeur utilise les mêmes chapitres que ceux du manuel de la classe et dans ce cas, nous pouvons affirmer que le professeur attache beaucoup d'importance au manuel de la classe et donc que l'analyse des manuels est pertinente pour notre recherche. D'autre part, la mise en évidence de certains titres de chapitres utilisés par les professeurs nous permettra d'avoir des idées sur leurs pratiques au niveau de l'utilisation des registres : par exemple si le professeur utilise le chapitre « Etude de sens de variation d'une fonction », on peut penser que l'utilisation du tableau de variations est certainement favorisée.

Quant au lien avec d'autres chapitres, cela nous donne des indices sur le fait que certains chapitres peuvent renforcer l'utilisation de certains registres mais pas d'autres, par exemple si on précise le chapitre « Equations et inéquations », on peut prévoir que l'utilisation des registres algébrique et graphique est renforcée.

Pour le chapitre « Statistique », nous faisons l'hypothèse que les enseignants ne voient pas un rapport important avec la notion de fonction, même s'il renforce l'utilisation du tableau de valeurs. Nous pensons que les enseignants ne font pas de lien entre ce chapitre et les autres. L'explication vient du fait qu'en France, les statistiques sont une branche à part des mathématiques. Nous savons bien que d'une part, lors de leurs études certains professeurs de mathématique n'ont pas étudié les statistiques et d'autre part que celles-ci sont au programme depuis peu d'années (introduit pour la première fois à la Troisième et développé en Seconde à partir du programme 1990).

### II.2 Des définitions de la notion de fonction (question 4)

Nous avons distingué la définition que les professeurs peuvent donner aux élèves et celle qu'ils utilisent pour eux, c'est-à-dire celle qu'ils ont construite à travers leurs études ou les anciens programmes. Nous voulons savoir si les enseignants donnent une définition explicite à leurs élèves (et laquelle) et si est différente de leur propre définition.

L'analyse des programmes nous a montré qu'il n'y avait pas de définition officielle, en revanche, l'analyse des manuels nous a montré qu'il y en avait une relativement constante :

> « Une fonction f est un procédé qui permet d'associer à tout nombre x, élément d'un ensemble E, un nombre unique y » (Fractale 2000)

Nous faisons l'hypothèse que les professeurs vont donner majoritairement la définition des manuels à leurs élèves. Quant à leur propre définition nous pouvons penser qu'elle risque d'être différente suivant l'enseignement qu'ils ont reçu.

### II.3 Des renseignements sur la définition et le rôle des tableaux (tableau de valeurs et tableau de variations) utilisés par les enseignants (questions 5 et 6)

De la même façon que pour la fonction, nous demandons si les professeurs donnent une définition de ces deux tableaux (et laquelle) à leurs élèves. De même que pour fonction, nous leur demandons leur propre définition. S'il semble naturel de donner une définition d'une fonction c'est moins le cas pour les tableaux : dans les manuels on ne trouve pas ce genre de définition, les élèves connaissent et utilisent déjà le tableau de valeurs et les professeurs pensent certainement que ce sont des objets qui ne nécessitent pas de définition.

La question sur le rôle de ces deux tableaux permet de préciser, d'une part, des types de tâche que les professeurs leur associent et d'autre part des éléments du contrat didactique de la classe.

### II.4 Des renseignements sur les avis des enseignants sur certaines questions que les élèves ont eu à faire dans leur questionnaire (questions 7, 8 et 9)

Il s'agit trois questions que nous avons retenues à partir du questionnaire des élèves que nous avons expérimenté dans les classes de $2^{nde}$ et de $1^{ère}$. Ce questionnaire a été préparé à partir de l'analyse de l'évolution des programmes et l'analyse des manuels de Seconde. Toutes les questions sont conformes au nouveau programme, par contre certaines d'entre elles ne se trouvent pas dans certains manuels (par exemple l'exercice 7 a été rencontré une fois dans « Fractale ») ou sont hors contrat (exercice 9 pour lequel il n'y a pas de réponse numérique). Il s'agit d'exercices qui demandent soit des traitements dans le registre tableau de valeurs soit des conversions du registre tableau vers d'autres registres.

Comme nous le verrons dans l'analyse a priori des exercices, ce ne sont pas des exercices classiques, certains sont en rupture avec le contrat que nous avons identifié dans l'analyse des manuels. C'est pourquoi nous avons tout d'abord demandé aux enseignants de donner un corrigé afin de voir quel type de réponse ils donnaient (ou ils attendaient de leurs élèves) et dans quel(s) registre(s) ils se placent.

Puis s'ils poseraient ces exercices à leurs élèves de Seconde et pour quelles raisons. Nous voulions savoir si les professeurs considèrent que les exercices de conversion de registres dans lesquels interviennent des tableaux font partie des types de tâches compatibles avec les nouveaux programmes ou non, ou bien si ces exercices sont hors contrat parce que les professeurs pensent qu'ils sont trop durs ou trop ouverts, ou bien s'ils n'y pensent pas, c'est-à-dire que leur rapport personnels aux objets tableaux ne prend pas en compte ce type de question.

Nous avons également demandé à quel moment de l'apprentissage (exercice d'introduction, d'entraînement, de réinvestissement, etc.) ils poseraient ces exercices. Nous avons envisagé tous les moments d'apprentissage possibles. Ainsi nous pensons que ces exercices pourraient être donnés comme activités d'introduction soit du tableau de variations soit pour montrer les limites d'un tableau de valeurs soit pour montrer les liens entre les registres tableaux et graphique. Si les professeurs choisissent comme un exercice d'entraînement ou de réinvestissement, nous faisons l'hypothèse qu'ils estiment que cet exercice fait partie des types de tâches importantes pour la notion étudiée. Elles peuvent même faire partie du rapport institutionnel des élèves et donc être évaluées en DS. En revanche, s'ils choisissent de le proposer en DM on peut penser que les professeurs trouvent cet exercice intéressant mais moins important du point de vue du rapport institutionnel ; cet exercice est plutôt considéré comme un exercice de recherche.

Enfin, nous avons demandé leurs avis sur les principales difficultés qu'un élève de Seconde pourrait rencontrer dans la résolution de ces exercices. Nous voulions savoir si les professeurs sont conscients des difficultés dues aux changements de registres.

# III. Analyse a posteriori :

22 enseignants de Seconde ont accepté de répondre à ce questionnaire. Leur ancienneté en seconde est diverse : Sept enseignants ont commencé à enseigner avant le programme 1980 ; un enseignant dans la période 1986 – 1990 et deux autres dans celle de 1980 – 1986 ; dix d'entre eux ont commencé à enseigner à partir du programme 1990 ; Enfin un enseignant a commencé à partir du nouveau programme et un ne répond pas à cette question.

Pour faciliter l'analyse de leurs réponses, nous codons ces enseignants par Pi (i = 1, 2, …, 22).

### Question 1

Pour les manuels des classes on trouve : Déclic (10 fois), Hyperbole (5 fois), Belin (4 fois), Nathan (1 fois) et Bréal (1 fois). Cela peut donc signifier que les tendances de certains manuels (exercices « typiques », point particuliers du programme plus ou moins approfondi) peuvent se retrouver dans la vie de la classe. Mais la totalité de ces enseignants disent se servir de plusieurs manuels (comme Fractale, Bordas, Indice, Bréal,…) pour préparer leurs cours et aussi comme sources d'exercices à proposer. Ainsi on peut penser que ces enseignants ne sont pas totalement assujettis au seul manuel de la classe ; ils peuvent choisir d'autres types d'exercices qui n'apparaissent pas dans le manuel de la classe.

On sait bien aussi que les enseignants peuvent modifier certains des exercices, aussi bien sur la forme que sur le fond, tout en restant dans le cadre du programme. Ils disposent aussi d'une part de liberté dans la mise en scène des séances d'exercices, dans les indications ou les conseils qu'ils acceptent ou non de livrer aux élèves (pratiques propres à chacune des classes).

Notons que les manuels que nous avions choisi d'analyser sont assez souvent cités (surtout Déclic, Fractale et Hyperbole), ce qui montre la pertinence de l'analyse de ces manuels pour essayer de dégager des organisations mathématiques autour de la notion de fonction et plus particulièrement du registre tableaux.

### Question 2

Les deux chapitres suivants : « Généralités sur les fonctions » et « Fonctions de référence » sont cités par tous les enseignants. Pour dix d'entre eux ce sont les seuls. En plus, le chapitre « Fonctions affines » apparaît chez sept enseignants (ils utilisent plutôt « Belin » comme le manuel de classe), le chapitre « Sens de variation d'une fonction » apparaît chez trois enseignants et enfin un seul enseignant utilise les deux derniers chapitres cités ci-dessus.

On voit donc que les chapitres utilisés par les enseignants correspondent en général aux chapitres du manuel de la classe, ce qui peut paraître normal puisque les enseignants de chaque lycée choisissent leurs manuels.

Le chapitre « Fonctions affines » est apparu chez sept enseignants, ce que nous considérons comme un nombre important. On donne ainsi un statut à part à l'étude de la fonction affine. Nous pensons que ce résultat est surprenant dans la mesure où la fonction affine a déjà été étudiée en Troisième et qu'il s'agit de l'une des fonctions de référence. Ou alors, les fonctions affines ne sont pas identifiées comme des fonctions de référence comme si on distinguait les fonctions affines et les autres, ce qui correspond au découpage du programme entre classe de $3^{ème}$ et de $2^{nde}$.

## Question 3

Quant aux chapitres qui peuvent entretenir un rapport important avec la notion de fonction selon les enseignants interrogés : Le chapitre « Equations et inéquations » apparaît chez dix enseignants ; les chapitres « Ordres des nombres », « Calcul algébrique » et « Equations de droites et systèmes linéaires » apparaissent chez cinq enseignants ; les chapitres « Géométrie et transformations », « Statistique » et « Pourcentage » chacun chez un enseignant. Un enseignant dit que pratiquement tous les autres chapitres et qu'il suffit de chercher une « variable adéquate ».

Nous remarquons que les chapitres « Equations et inéquations » et « Equations de droites et systèmes linéaires » sont assez peu cités (moins de la moitié), ce qui parait étonnant puisque dans le programme les liens avec la fonction sont explicites et les deux sont étudiés ensemble dans une de trois grandes parties du programme.

Pour le chapitre « Statistique », les réponses confirment notre analyse a priori : on peut penser que ce chapitre reste un peu à part et que les professeurs ne font pas vraiment de liens avec les autres parties du programme.

## Question 4

### *Question 4A*

17 des 22 enseignants affirment donner une définition explicite de la fonction à leurs élèves. Trois n'en donnent pas mais ils précisent qu'ils donnent une idée de ce qu'est une fonction, et enfin deux ne répondent pas à cette question. Ceux qui ne donnent pas une définition pour la question 4a, ne répondent pas non plus à la question 4b, sauf qu'un d'entre eux dit « plutôt floue ».

Les définitions données aux élèves par les enseignants sont semblables à celles données dans les manuels, avec toutes les nuances de formulation (un enseignant fait référence explicitement à la définition donnée dans le manuel « Déclic » en disant « oui, celle de Déclic »). Ainsi, quinze enseignants utilisent l'une à l'autre de ces deux formulations :

> « Une fonction est un procédé qui à un nombre lui associe un autre nombre »
> « Soit D une partie de IR. Définir une fonction dans D, c'est donner un procédé qui associe à chaque réel de D un réel appelé son image »

Un de ces professeurs ajoute qu'il insiste sur le fait qu'il n'y a pas que des fonctions numériques de la variable réelle (diagrammes, fonction du plan). Un autre, après avoir donné la définition ci-dessous, précise que les élèves ne comprennent pas bien cette phrase et qu'il faut se référer à des exemples pour qu'ils comprennent le sens. Un autre lie le mot « procédé » avec « formule, graphique, tableau » et il ajoute également que ces trois moyens sont vus avant de donner la définition.

Deux autres enseignants donnent les définitions suivantes :

> « Une fonction est une relation entre deux ensembles (un ensemble de départ appelé source et un ensemble d'arrivé appelé but) qui à chaque élément de la source fait correspondre au plus, un élément du but »
> « Une fonction de A vers B est une correspondance entre A et B telle que, à tout élément de A corresponde au plus un élément de B, noté f(x) »

Ils préfèrent utiliser les mots « relation » ou « correspondance ». Nous pensons que ces mots offrent une vision plutôt statique et font appel à la définition ensembliste de la fonction. Nous faisons l'hypothèse que ces enseignants ont pu être influencés (en position d'enseignant ou d'élève) par les anciens programmes où on étudiait la fonction comme une loi ensembliste.

***Question 4b***

Dix d'entre eux disent avoir la même définition que celle qu'ils ont donnée pour la question 4a. Sept autres enseignants utilisent les mots « relation », « application » ou « correspondance » en disant, plus ou moins, « une fonction est une relation particulière entre deux ensembles ». Comme nous l'avons précisé ci-dessus, ces mots font appel, pour nous, à la définition ensembliste de la fonction et ils offrent une vision plutôt statique.

Voici les réponses de trois autres enseignants qui sont en peu différentes :

> P11 : Si une grandeur y dépend d'une grandeur x et qu'à chaque valeur de x dans un intervalle donné correspond une seule valeur de y, alors on peut écrire y = f(x). Extension à plusieurs variables $y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$
> P19 : Notion de relation fonctionnelle, définie à partir du graphe : sous ensemble de EXF et $\forall x \in E, \forall y \in F \quad xfy \text{ et } xfy' \Rightarrow y = y'$
> P21 : Je l'associe à la courbe représentative. C'est une courbe qui ne coupe pas une verticale 2 fois

P11 enseigne depuis 35 ans en Seconde. Il utilise une relation de dépendance pour définir la fonction.

P19 enseigne depuis 24 ans en Seconde. Il a donc commencé à enseigner avant le programme de 1980. Ainsi, cette définition nous montre qu'il a gardé sa conception de la fonction comme une loi ensembliste.

P21 montre qu'il associe la définition d'une fonction avec sa représentation graphique et qu'il privilégie ainsi l'identification de la notion dans le registre graphique.

Enfin, deux autres enseignants ne répondent pas à cette question, on peut supposer qu'ils ont donc la même définition que celle qu'ils donnent à leurs élèves ( ?).

Ainsi, la plupart des enseignants donnent à leurs élèves une définition d'une fonction plus ou moins « conforme » au système de contraintes institutionnelles étudiées à partir des manuels et du nouveau programme : Il s'agit effectivement pour eux de présenter ou de faire émerger la fonction en tant que loi de variation. On trouve ici une grande uniformité dans les réponses des enseignants qui montre un attachement aux directives du programme.

Néanmoins, il y a plus de diversité dans les conceptions propres des enseignants. En effet, environ la moitié d'entre eux montrent qu'ils restent attachés à une définition ensembliste en termes de relation. Il est clair que ce phénomène touche plus systématiquement les enseignants les plus âgés qui semblent donc marqués par l'enseignement qu'ils ont reçu, voire par leurs premières années d'enseignement. Dans quelle mesure cet écart entre leur propre conception et la définition officielle qu'ils donnent à leurs élèves peut-il influencer leur enseignement ? Cette question reste délicate.

## Question 5

### *Question 5a et 5b*

*1. Ceux qui déclarent donner une définition explicite d'un tableau de valeurs à leurs élèves (6)*

Deux professeurs disent « oui » sans préciser comment ils le font. Un des deux explique que le tableau de valeurs est traité dans la partie « Généralités sur les fonctions », qu'il fait ensuite des courbes représentatives de fonctions et qu'il oblige les élèves à utiliser la calculatrice. L'autre précise qu'il utilise le tableau de valeurs uniquement par des exemples. Ces deux professeurs ne répondent pas à la question 5b.

Seuls quatre professeurs affirment donner une définition explicite à leurs élèves, ce qui est conforme à notre analyse a priori. La plupart des enseignants pensent donc que le tableau de valeurs est un outil évident qui ne nécessite pas de définition.

Dans le tableau ci-dessous, on fait apparaître les définitions données à leurs élèves et leur propre définition :

| | **Définition donnée aux élèves (question 5a)[15]** | **Définition personnelle (question 5b)[15]** |
|---|---|---|
| P1 | C'est un tableau qui associe à certaines valeurs (**bien choisies**) de Df leurs images par la fonction f | idem |
| P11 | $y_i = f(x_i)$ pour $x_i \in$I, I : domaine de définition. | Si I est le domaine de définition (intervalle dans IR ou ensemble de valeurs discrètes) alors le tableau est l'ensemble des $(x_i ; y_i)$ |
| P15 | Tableau contenant des **valeurs particulières de la fonction** (je le dis à l'oral et l'applique sur un exemple en attirant leur attention sur le **problème du choix des valeurs**) | Représentation, par un tableau, de **valeurs particulières de la fonction**. |
| P18 | On choisit **quelques nombres** dans l'ensemble de définition. On calcule leurs images respectives. On consigne les résultats dans un tableau. | idem |

**Tableau n°1: les définitions données aux élèves et leurs propres définitions**

A la lecture de ce tableau, on remarque que :

- La définition qu'ils donnent à leurs élèves et leur propre définition sont identiques (les seuls différences portent sur des variations de formulations).
- P11 donne chaque fois une définition en utilisant le langage symbolique, nous précisons que ce professeur enseigne depuis 35 ans.
- On trouve des éléments du contrat de la classe dans la moitié de ces réponses : Selon P1, les valeurs du tableau de valeurs doivent être bien choisies et de même pour P15 les valeurs du tableau sont des valeurs particulières de la fonction. On peut penser que, pour eux, on peut avoir, par exemple, les extrema d'une fonction à partir d'un tableau de valeurs.

*2. Ceux qui déclarent ne pas donner une définition explicite à leurs élèves (13)*

Quatre professeurs affirment qu'ils ne donnent pas une définition explicite de ce qu'est un tableau de valeurs sans préciser la raison de ce choix. Deux d'entre eux affirment rappeler cette notion à travers des exemples et un autre dit qu'on utilise le tableau de valeurs donné par la calculatrice et enfin le dernier explique qu'il fait deux modules liés à cette notion : 1. Tableau de valeurs et graphique et 2. Calculatrices et tableaux de valeurs (Rappelons que cet enseignant utilise le manuel « Hyperbole » où ces deux modules apparaissent explicitement).

Pour la question 5b, deux d'entre eux n'y répondent pas et un autre dit que c'est un tableau récapitulatif et le dernier donne la définition suivante :

[15] Dans ce tableau, c'est nous qui avons souligné les mots qu'ils donnent des éléments du contrat de la classe.

« Ensemble de certains valeurs de $f(x_i)$ pour des valeurs $x_i$ données, en utilisant suivant un pas ».

Neuf autres enseignants affirment ne pas donner une définition explicite. Voici leurs explications et leurs propres définitions :

| | **Les explications (question 5a)**[16] | **Définition personnelle (question 5b)**[16] |
|---|---|---|
| P2 | Les élèves obtiennent un tableau de valeurs avec **la calculatrice** : soit on choisit un pas, soit on cherche des valeurs particulières. | C'est un tableau dans lequel on met dans la 1ère ligne des valeurs de x et dans la 2ème, les images par f de x. |
| P4 | Je leur montre ce qu'est un tableau de valeurs **à partir d'un exemple**. Il me semble qu'une définition explicite serait **trop compliquée** et **abstraite**. En général, je leur fais faire leur premier tableau de valeurs pour **tracer une courbe**. | Le tableau de valeurs contient une colonne de variables de l'ensemble de définition **régulièrement réparties** et une colonne contenant les images correspondantes (valeurs approchées) |
| P5 | Je travaille uniquement **à partir d'exemples**, en insistant sur **la nécessité de bien « choisir »les valeurs.** | Tableau présentant un certain nombre de valeurs et leurs images par une fonction, **permettant de tracer de manière honorable la courbe représentative de celle-ci.** |
| P7 | **Inutile** en 2nde, **des exemples** adaptés suffisent. | **Calcul programmé** d'image de réel par f (si fonction définie sur IR). |
| P10 | Je donne **des exemples** de tableaux de valeurs. On travaille avec le tableau de **la calculatrice**, mais les définitions explicites ne me semblent parfois qu'**alourdir le cours** sans donner de savoir-faire aux élèves. | |
| P16 | On se contente d'**exemples.** Une définition reste **trop abstraite**. | Une aide à la construction de la courbe représentative ou à **l'exploitation « dans la réalité » de la fonction**. |
| P17 | Ils connaissent le tableau de valeurs. | |
| P19 | Cette notion me paraît **évidente**. Je ne l'utilise que **pour tracer des courbes avec précision**. | Tableau dans lequel on calcule f(x) en fonction de x pour certaines valeurs de x. On peut donner éventuellement une valeur approchée de f(x). |
| P22 | Pour les élèves, je pense que les valeurs de l'ensemble E doivent nécessairement être à « **intervalle régulier** ». | Pour moi (implicitement), c'est un tableau où figure en 1ère ligne des valeurs de l'ensemble de départ E et en 2ème ligne, leurs images. |

**Tableau n°2: Leurs explications et leurs propres définitions**

A la lecture de ce tableau, on peut remarquer que :

[16] Dans ce tableau, c'est nous qui avons souligné les mots qui donnent des éléments du contrat de la classe.

- La plupart des enseignants interrogés ne donnent pas de définition explicite d'un tableau de valeurs à leurs élèves. Ils jugent en général qu'une définition explicite ne fait qu'alourdir le cours (par exemple P4, P10 et P16), et/ou que des exemples suffisent.
- Ils introduisent en général cet objet à partir d'un exemple et la plupart d'entre eux pensent que c'est un outil qui ne nécessite pas de définition : P19 dit clairement que cette notion paraît évidente pour lui et ainsi P17 dit également que les élèves connaissent déjà le tableau de valeurs.
- Deux d'entre eux associent cet outil au tracé des courbes et, en plus, l'un de deux dit qu'il utilise cet outil pour tracer des courbes « avec précision » (P19).
- On constate aussi quelques éléments du contrat de la classe qui sont liées à l'utilisation de cet objet : Selon P5, il faut bien choisir les valeurs du tableau de valeurs et du même P22 constate que pour les élèves les valeurs de l'ensemble de définition doivent nécessairement être à « intervalles réguliers ».
- Quant à leur propre définition, on trouve des « ingrédients » sur le contrat de l'utilisation du tableau de valeurs : par exemple, P4 utilise les mots « régulièrement repartie » pour dire qu'il faut utiliser un pas entre les valeurs de la variable.
- P7 donne une définition qui n'est liée qu'à l'utilisation de la calculatrice graphique.

*3. Ceux qui ne disent ni oui ni non pour donner une définition explicite d'un tableau de valeurs (3)*

Il s'agit trois enseignants qui ne précisent pas s'ils donnent ou pas à leurs élèves une définition de ce qu'est un tableau de valeurs. Par contre, tous les trois parlent de l'usage de la calculatrice.

Quand à leurs propres définitions (question 5b) ; un (P6) d'entre eux donne cet explication : « *Outil de base pour une approche de la fonction et pour aider (voir piéger) pour la courbe représentative* ». Un autre (P14) dit que le tableau de valeurs permet de construire une courbe point par point et enfin le dernier (P12) n'y répond pas.

***Question 5c***

La question 5c portant sur le rôle du tableau de valeurs ; nous avons constaté dans les définitions ou les explications pour les questions 5a et 5b, qu'il y a des indices sur le rôle d'un tableau de valeurs ainsi que les éléments du contrat sur l'utilisation de cet outil et sur les types de tâches associées. Nous reprenons ces résultats et nous les complétons par le rôle du tableau de valeurs (question 5c).

Nous avons construit une grille de plusieurs colonnes : chaque colonne a pour but de donner les informations suivantes :

1ère colonne : le numéro des enseignants.

Les colonnes de 2 jusqu'à 8 : les différentes rôles du tableau de valeurs que les enseignants citent dans leur réponse.

Les colonnes 9 et 10 : les éléments du contrat cité par les enseignants.

11$^{ème}$ colonne : ceux qui précisent l'utilisation de la calculatrice graphique.

| | Connaître quelques images (voir le lien « variable- images) | Approche empirique de la fonction (illustration numérique) | Montrer certaines difficultés… | Une aide (un outil) pour tracer de la courbe représentative | Un outil pour tracer de façon précise la courbe représentative | Vérifier un sens de variations (comportement de la courbe…) | Vérifier les solutions d'une équation et d'une inéquation | Conjecturer le sens de variation ou les extremums | C1 : il faut utiliser un pas régulier | C2 : les valeurs doivent être bien choisi (valeurs particulières) | Ceux qui citent l'utilisation de la calculatrice |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| P1 | | | | x | | | | | | x | |
| P2 | | | | | x | | | | | | x |
| P3 | | | | x | | | | | | | x |
| P4 | x | | | x | | | | | x | x | |
| P5 | | | | | x | | | | | x | |
| P6 | | | | x | | | | | | | x |
| P7 | | | | | | | | | | | x |
| P8 | | | | x | | x | x | x | | | x |
| P9 | | | | x | | | | | | | |
| P10 | | | | x | | | | | | | x |
| P11 | | | x | | | | | x | | | x |
| P12 | | | | | | | | | | | x |
| P13 | | | | x | | | | | | | x |
| P14 | | | | x | | | | x | | | x |
| P15 | | x | | | | | | | | x | |
| P16 | | x | | x | | | | | | | |
| P17 | x | | | | | | | | | | |
| P18 | | | | x | | | | | | | |
| P19 | | | | | x | | | | | | |
| P20 | | x | | | | | | | x | | |
| P21 | | | | x | | | | | | | |
| P22 | | | | x | | | | x | | | x |

**Tableau n°3: Tableau récapitulatif pour les questions 5a, 5b et 5c**

A la lecture de ce tableau, on remarque que :

- Seuls deux enseignants disent que le tableau de valeurs ne donne que le lien entre certaines valeurs et leurs images.

- Trois enseignants précisent que le tableau de valeurs est une approche empirique de la fonction. Nous pensons que c'est la formule algébrique qui semble abstraite et qui se matérialiserait par des valeurs numériques.
- La moitié des enseignants interrogés précisent que le tableau de valeurs a pour rôle d'aider au tracé d'une représentation graphique. Trois autres précisent que cet outil permet de tracer de façon précise la courbe représentative d'une fonction. On peut penser qu'ils veulent dire que cela permet de préciser des valeurs par rapport au tableau de variations.
- Quatre précisent que cet outil permet de conjecturer le sens de variation ou les extrema d'une fonction.
- Quatre autres enseignants précisent que les valeurs de la variable doivent être bien choisies. Ce nombre nous parait important, ainsi, on peut penser qu'ils utilisent le tableau de valeurs comme un tableau de variations.
- Enfin, onze enseignants parlent de l'usage de la calculatrice programmable pour construire un tableau de valeurs.

Différentes réponses, qui n'ont pas été cités ci-dessus, sont les suivantes :

- P7 constate que le rôle du tableau de valeurs est beaucoup moins important qu'auparavant et que la calculatrice le remplace. Ainsi pour lui, on peut penser qu'un élément important du travail mathématique est de faire des calculs ou bien il veut parler des valeurs exactes qui seraient données par un calcul sans calculatrice.

  Cet enseignant est le seul qui donne une définition lié à l'utilisation de la calculatrice, voici sa propre définition : « calcul programmé d'image de réel par f (si fonction définie sur IR) ».

- P11 est le seul enseignant qui indique qu'on peut utiliser le tableau de valeurs pour montrer toutes les difficultés en utilisant la calculatrice, en particulier dans la recherche de maximum et minimum d'une fonction. Ainsi il donne l'exemple suivant :

  « Si à partir de x = 1 et le pas est 0.5 la machine ne trouve pas le maximum si celui-ci est pour x = 4/3 ».
- P16 explique que le tableau de valeurs rend la notion de fonction moins « effrayante » et qu'il y a des nombres et pas des lettres. D'autre part, il dit que grâce à cet outil on peut exploiter « dans la réalité » la fonction. Là c'est la formule algébrique qui semble abstraite et qui se matérialiserait par des valeurs numériques.
- P17 précise qu'on peut connaître la fonction proprement dite grâce au tableau de valeurs. Nous pensons que cette enseignant donne un statut important à l'étude de la fonction affine et d'ailleurs il a précisé qu'il utilisait un chapitre à part à l'étude de la fonction affine.
- P19 est le seul enseignant qui parle la relation du tableau de valeurs et du tableau de variations. Il précise, comme le rôle du tableau de valeurs, qu'on peut vérifier la comptabilité avec le tableau de variations.

Finalement, la plupart des enseignants pensent que cet objet ne nécessite pas de définition et que les élèves le connaissent et l'utilisent déjà, cela confirme notre hypothèse. Il semble pour eux que les connaissances sur les tableaux de valeurs sont peu importantes, voire transparentes et donc qu'elles n'ont pas à être expliciter. Ceci est encore renforcé par l'utilisation de la calculatrice programmable.

Quant à leurs propres définitions, on constate qu'elles diffèrent de façon importante et on peut les classer ainsi : environ un tiers des enseignants précise que le tableau de valeurs est un résumé de quelques valeurs et de leurs images sans choix sur la variable (8 enseignants), alors que pour six enseignants le tableau de valeurs est soumis à des contraintes sur le choix de la variable (pas, valeurs particulière, etc.), et en plus, pour deux autres enseignants, il est exhaustif de tous les couples (x, f(x)). Enfin six enseignants ne précisent pas une définition en disant « aucune intérêt » ou « la calculatrice le remplace » ou sans réponse.

Quant au rôle du tableau de valeurs, la plupart des enseignants sont d'accord sur le fait qu'il aide à tracer la représentation graphique d'une fonction (trois enseignants précisent « tracer avec précision »). Les enseignants considèrent donc que cet objet est très lié au registre graphique et on peut donc penser qu'ils auront du mal à l'associer à d'autres types de tâches.

## Question 6

***Questions 6a et 6b***

Un enseignant ne répond pas à ces deux questions (P14).

*1. Ceux qui déclarent donner à leurs élèves une définition explicite de ce qu'est un tableau de variations (9)*

Neuf enseignants déclarent donner une définition de ce qu'est un tableau de variations. Voici les définitions données aux élèves et leurs propres définitions :

| | Définition donnée aux élèves (Question 6a) | Définition personnelle (Question 6b) |
|---|---|---|
| P3 | Le tableau de variations d'une fonction résume les résultats de l'étude des variations d'une fonction numérique | idem |
| P7 | Oui, en tant que <u>résumé</u> du sens de variation de f sur chaque intervalle où elle est monotone. | C'est un résumé d'études précédentes (sens de variation, valeurs aux bornes en $2^{nde}$) |
| P9 | Par des exemple uniquement, avec des allers-retours tableau – dessin de courbe pour débuter | Il donne le sens de variation de la fonction et son ensemble de définition. |
| P11 | f croissante si $\forall a \in I$ et $\forall b \in I$, si $a<b$ alors $f(a) < f(b)$ ( et décroissante) démontrant pour $f(x) = mx + p$ et $g(x) = x^2$ et $h(x) = 1/x$ (sur IR* ) | Voir d'un simple « coup d'œil » sur certaines propriétés simples de la fonction (inadapté pour des fonctions « pénibles ») |
| P15 | (Oui et non) c'est une représentation (un résumé) des variations d'une fonction $1^{ère}$ ligne : ensemble de définition de f $2^{ème}$ ligne : on note par des flèches les variations. | Idem résumé (ou schéma) des variations d'une fonction. |
| P17 | Il résume le sens de variation (en Seconde il est incomplet) | idem |
| P18 | Je définis d'abord une fonction croissante sur un intervalle [a ; b] je traduis par le tableau … | |
| P19 | C'est un tableau dans lequel on résume les variations de la fonction et dans lequel on indique si possible les extrema. | Idem avec la notion de comportement aux bornes de l'ensemble de définition. |
| P21 | C'est un résumé de ce que l'on connaît. On doit faire apparaître : les nombres importantes, les variations et les extrema, les images des nombres importantes. | Idem |

A la lecture de ce tableau, on peut remarquer que,

- Les définitions qu'ils donnent à leurs élèves sont plus ou moins identiques et tous précisent que le tableau de variations résume le sens de variations d'une fonction. Pourtant, certains professeurs ajoutent à explicitement que dans un tableau de variations on fait apparaître aussi les extrema (ou les nombres importants).
- On constate que, comme dans les questions précédentes, P11 donne d'abord une définition de ce qu'est une fonction croissante et une fonction décroissante avec le langage formel et avec le registre algébrique

*2. Ceux qui déclarent ne pas donner à leurs élèves une définition explicite de ce qu'est un tableau de variations (8)*

Huit enseignants déclarent qu'ils ne donnent pas à leurs élèves une définition explicite de ce qu'est un tableau de variations :

| | Leurs explications (Question 6a) | Définition personnelle (Question 6b) |
|---|---|---|
| P1 | - schéma des variations de f<br>- fait sur un exemple<br>- notion qui évoluera au fur et à mesure des découvertes sur les fonctions (valeurs exclues de $D_f$, valeurs importantes en 1ère pour f') | On y note tant ce qui est important pour les variations de f (et par extension en 1ère pour f') |
| P4 | Une définition explicite me parait, là aussi, très compliqué. Je le traite à partir d'un exemple où la fonction est représentée graphiquement. | Le tableau de variations est une représentation stylisée de la courbe avec un certain nombre d'indications importantes : variations, mais aussi extrema, antécédents des extrema, éventuellement valeurs interdites, coordonnées de points de la courbe. |
| P6 | Pas vraiment | Résumé visuel avec des règles bien précis ! |
| P10 | Je présente le tableau de variations comme un moyen pratique d'indiquer les variations de la fonction, avec des précisions supplémentaires (les images des bornes et les extremums) | |
| P13 | Je le présente comme un outil permettant de rendre compte d'une situation : valeurs aux bornes, sens de variations, extremum | Idem, en y ajoutant les limites aux bornes. |
| P16 | C'est un outil, ce qui important c'est sa construction et son utilisation. | Outil |
| P20 | Formalisation au résumé des résultats de l'étude du sens de variation et valeurs remarquables | Idem |
| P22 | Un premier tableau est dresser à partir de renseignements du type « f est croissante sur […] décroissante sur […] | 1ère ligne : Bornes des intervalles sur lesquelles la fonction garde un même sens de variation<br>2ème ligne : flèches pour croissance/décroissance (au sens large), valeurs au bout des flèches (valeurs atteintes en 2nde limites à partir de la 1ère) |

On constate que, même si ces enseignants ne donnent pas une définition de ce qu'est un tableau de variations à leurs élèves, ils sont tous d'accord sur le fait que le tableau de variations est une résumé visuel et qu'on y note tout ce qui est important pour les variations d'une fonction. Pour certains, une définition explicite est très compliquée alors que pour d'autre ce qui est important c'est son utilisation.

La plupart d'entre eux disent qu'ils introduisent le tableau de variations à partir d'un exemple où la fonction est représentée graphiquement.

*3. Ceux qui ne disent ni oui ni non pour donner à ses élèves une définition explicite (4)*

| | **Leurs explications (Question 6a)** | **Définition personnelle (Question 6b)** |
|---|---|---|
| P2 | Je leur explique que c'est un résumé de l'étude du sens de variation de la fonction. Il permet aussi d'avoir une idée de l'allure de la courbe. | idem |
| P5 | A partir d'un exemple ; (lecture graphique), j'expose le 1ère tableau de variations en isolant toutes ses composantes : […] de $D_f$, x où il y a changement de variation, valeur interdite, etc… | Tableau permettant de décrire de façon rapide le sens de variations d'une fonction |
| P8 | Je définis de façon explicite le sens de variation d'une fonction. Je présente le tableau de variations comme un résumé | Idem |
| P12 | On présente un tableau de variations pour schématiser la notion de fonction croissante ou décroissante sur un intervalle de domaine de définition d'une fonction | On présente un tableau mais de là à le définir ! |

On retrouve les mêmes explications que chez les précédents.En effet, ils déclarent également que le tableau de variations permet de décrire de façon rapide le sens de variation et qu'il est un bon résumé. Deux d'entre eux précisent de l'introduire à partir du registre graphique.

***Question 6c***

Pour cette question, la plupart des enseignants sont d'accord sur le fait que le tableau de variations est indispensable pour une étude du sens de variation d'une fonction.

- Ainsi 11 enseignants précisent que le tableau de variations résume des propriétés d'une fonction en citant « l'ensemble de définition, les variations, les extrema » (certains d'entre eux disent même que c'est un très bon résumé).
- Dans 8 réponses, les enseignants l'associent clairement à la représentation graphique et ils disent que le tableau de variations schématise (ou visualise) l'allure de la courbe, et qu'on peut avoir des idées sur la courbe représentative d'une fonction.
- Les réponses « Guider le raisonnement pour des problèmes d'encadrement – majoration – minoration » et « Permettre de comparer rapidement deux images » apparaissent, chacune, chez un enseignant.

Nous ajoutons également que certains enseignants comparent cet objet avec le tableau de valeurs et disent qu'on ne peut pas faire une étude approfondie d'une fonction avec le tableau de valeurs alors que le tableau de variations est primordial.

Finalement, la quasi-totalité des enseignants considèrent que le tableau de variations est un objet indispensable pour l'étude des fonctions et qu'il constitue un résumé des propriétés d'une fonction (beaucoup l'associent au terme « schéma »). Cependant, comme pour le tableau de valeurs, la plupart d'entre eux ne donnent pas une définition explicite aux élèves. Aucun n'indique de connaissances sur sa construction, sur les codes et les codages qu'on utilise dans un tableau de variations. Il semble que, comme pour le tableau de valeurs, les connaissances sur les tableaux de variations restent transparentes pour eux et ne fassent donc pas l'objet d'un enseignement explicite.

Quant à son rôle pour la notion de fonction, les enseignants précisent deux rôles principaux : résumé des propriétés d'une fonction et schéma de l'allure de la courbe. Ces rôles cités nous donnent des idées sur les types de tâches qu'ils lui associent :

- Tâche de traitement : répondre à certains questions sur les propriétés d'une fonction (sens de variations, extrema, comparer deux images, etc.) et
- Tâche de conversion entre le tableau de variations et le registre graphique.Là encore on peut voir que le tableau de variations est fortement associé au registre graphique.

Pour les questions suivantes, nous avons demandé aux enseignants de se prononcer sur certains exercices.

## Question 7

### *Question 7a*

Un enseignant n'a pas donné de corrigé. Il précise pourtant qu'il ferait d'abord la liaison avec une représentation graphique et ensuite le tableau de variations. Ceci montre que la conversion directe entre le tableau de valeurs et le tableau de variations n'est pas conforme au rapport institutionnel pour cet enseignant.

2 enseignants donnent un tableau de variations erroné dans lequel la fonction est décroissante sur [-2 ; -1] et croissante sur [-1 ; 2]. Nous pensons qu'ils n'ont pas fait attention l'ordre des valeurs de la fonction.

18 enseignants donnent, comme premier tableau de variations, un tableau où la fonction est toujours croissante sur l'intervalle [-2 ; 2], sans introduire de nouvelles valeurs, ce qui est la réponse la plus simple et compatible avec le tableau de valeurs. Deux d'entre eux ajoutent, en plus, les autres valeurs du tableau qui ne sont pas pertinentes pour le tableau de variations.

Seul un enseignant introduit dès le début une nouvelle valeur « demi-entière » entre deux valeurs successives pour changer la monotonie de la fonction sur l'intervalle donné.

*Pour le deuxième tableau de variations possible,*

4 enseignants donnent seulement des explications sur le fait qu'entre deux valeurs successives du tableau, la fonction peut changer du sens de variation (certains donnent aussi un exemple numérique) sans donner un autre tableau de variations.

Ceux qui donnent un autre tableau de variations, introduisent toujours une valeur demi-entière (trois enseignants en introduisent deux), sauf un enseignant qui utilise deux autres valeurs décimales (1,1 et 1,97). Ceux qui ajoutent les valeurs non pertinentes pour le premier tableau de variations, les ajoutent également dans le deuxième tableau de variations.

Trois enseignants tracent également les représentations graphiques correspondantes. On ne sait pas s'ils les ont faites avant de trouver les tableaux de variations (peut-être qu'ils n'envisagent pas une conversion directe entre deux tableaux) ou bien pour confirmer leurs réponses.

Finalement, la plupart des enseignants donnent un premier tableau de variations le plus simple possible, ce qui nous semble normal. Pour le deuxième, la plupart introduit une valeur demi-entière, ce qui nous parait être une indication importante relative au contrat didactique que nous avions déjà identifiée lors de l'analyse des manuels.

***Question 7b***

Un enseignant répond « oui » et un autre répond « non » sans donner d'explication.

Six autres enseignants précisent qu'ils pourraient poser cet exercice à condition de modifier l'énoncé ou sa forme : donner un tableau de valeurs avec plusieurs tableaux de variations et choisir ceux qui sont compatibles. Deux d'entre eux précisent préférer un tableau de valeurs avec des graphiques possibles et ensuite les tableaux de variations. Ils transforment donc cet exercice pour le rendre plus conforme à ce qu'on trouve dans les manuels. De plus, ils introduisent un choix parmi plusieurs graphiques ou tableaux, ce qui rend le problème moins ouvert en ce qui concerne le nombre de réponses possibles. Ainsi, nous pensons que ces professeurs considèrent que cet exercice est hors contrat parce qu'il est trop ouvert ou leurs rapports personnels aux objets tableaux ne prennent pas en compte ce type de conversion « directe » entre deux tableaux.

Voici les raisons pour lesquelles les autres enseignants précisent pourquoi ils pourraient proposer cet exercice à leurs élèves. Dans le tableau ci-dessous, nous avons mis à gauche les raisons citées et le nombre d'enseignants à droite. Il faut noter que certains enseignants donnent plusieurs raisons :

| **Les raisons cités par les enseignants** | **Σ P** |
|---|---|
| 1. Montrer qu'un tableau de valeurs ne suffit pas à connaître une fonction | 6 |
| 2. Comprendre de ce qu'est un tableau de variations et le sens de variation | 4 |
| 3. Montrer qu'un tableau de valeurs ne permet pas de connaître le sens de variation | 3 |
| 4. Montrer le lien (et les distinguer) entre deux tableaux et aussi un tableau de variations donne plus d'informations qu'un tableau de valeurs | 3 |
| 5. Expliquer les liens entre les différentes notions du chapitre (max, min, les variations) | 3 |
| 6. Pour rappeler que l'intervalle [-2 ; 2] n'est pas fait seulement de nombres entiers | 2 |
| 7. Un tableau de valeurs seul ne permet pas de construire la courbe représentative d'une fonction | 2 |

Nous voyons apparaître deux types de raisons : 1, 2 et 7 sont d'avantage liées aux connaissances portant sur un seul objet, alors que 3, 4, 5 concernent plutôt les liens entre différentes notions.

***Question 7c***

Pour cette question, chaque enseignant donne plusieurs réponses :

La réponse « une partie d'un DM » est citée par 12 enseignants, ce qui constitue la majorité des réponses. Les réponses « un exercice d'entraînement » et « une partie d'un DS » sont citées, chacune, par 4 enseignants. Les réponses « un exercice d'introduction », « un exercice de réinvestissement » et « aide individualisé » sont citées, chacune, par 3 enseignants et enfin les réponses « une activité » et « module » sont citées, chacune, par 1 enseignant.

Nous remarquons donc que la plupart des enseignants cite la réponse « une partie d'un DM ». Nous pensons qu'ils considèrent que cet exercice est moins important du point de vue du rapport institutionnel et qu'il est plutôt considéré comme un exercice de recherche. Il est ainsi renvoyé au travail privé de l'élève.

***Question 7d***

Ceux qui répondent « non » à la question b, ne répondent pas, non plus, à cette question. Voici les principales difficultés des élèves de Seconde que les enseignants citent dans leur réponse :

| **Les difficultés des élèves selon les enseignants** | **Σ P** |
|---|---|
| 1. Les élèves ont tendance à ne prendre que des valeurs entières pour x. Ils n'imaginent pas qu'il peut se passer quelque chose entre deux valeurs entières<br>Difficulté à envisager des valeurs réelles entre deux entiers et leurs images, non données | 10 |
| 2. Etre influencé par les fonctions affines étudiées au collège et joindre les points du tableau par des droites donc un seul tableau de variations | 4 |
| 3. Le fait qu'il y ait plusieurs solutions possibles | 4 |
| 4. Beaucoup d'élèves penseraient que la fonction est nécessairement croissante sur [-2 ; 2], parce qu'ils ont « plein d'exemples » avec a<b et f(a)<f(b)<br>Ils utilisent les tableaux de valeurs comme des tableaux de variations | 4 |
| 5. Ranger dans l'ordre des nombres négatifs | 1 |

Si on excepte la réponse 5 qui concerne une erreur classique sur les relatifs et non sur les fonctions, ce tableau montre que les professeurs sont bien conscients des difficultés dues aux changements de registres et plus particulièrement celles relatives au tableau de valeurs. Même si ces réponses sont formulées de façon différente, elles indiquent en peu la même idée : la difficulté pour les élèves à considérer qu'à un tableau de valeurs ne correspond pas une fonction unique.

En conclusion, sur cette question 7, nous voyons là une contradiction entre le fait que les enseignants sont conscients des difficultés des élèves relativement au tableau de valeurs et aux tâches de conversion mais ne semblent pas vouloir les prendre en compte dans le cadre de la classe. Une explication de ce phénomène peut venir du fait que les enseignants considèrent que cet exercice est hors contrat parce qu'il est trop ouvert (pas de réponse unique) ou bien que ce type de conversion entre deux tableaux n'a pas sa place dans la pratique de la classe (les enseignants n'envisagent que les tâches de conversion entre tableaux et graphique), ce qui est cohérent avec les réponses aux questions précédentes.

## Question 8

### *Question 8a*

Pour cette question, 8 enseignants tracent une courbe « lisse » et une courbe qui correspond à une fonction affine par morceaux. Là encore, ces réponses sont certainement révélatrices de leurs pratiques (les points sont reliés soit par des segments de droite soit par une courbe la plus lisse possible).

Les autres enseignants, après avoir tracé une courbe lisse, tracent une autre courbe en faisant un léger changement autour de la courbe lisse.

### *Question 8b*

Tous les enseignants déclarent qu'ils poseraient ce type d'exercice à leurs élèves sans hésitation, ce qui est cohérent avec les réponses à la question 6. Nous constatons donc que la conversion d'un tableau de variations à une représentation graphique, contrairement à l'exercice précédent, est bien une tâche classique en $2^{nde}$. Ce résultat n'est pas surprenant dans la mesure où dans le nouveau programme (2000) on précise explicitement d'étudier la relation entre le tableau de variations et la représentation graphique d'une fonction :

> « Décrire, avec un vocabulaire adapté ou un tableau de variations, le comportement d'une fonction définie par une courbe. Dessiner une représentation graphique compatible avec un tableau de variations. » (Programme de Seconde, 2000)

Voici les raisons que les enseignants indiquent dans leur réponse :

| **Les raisons cités par les enseignants** | **Σ P** |
|---|---|
| 1. Expliquer que la monotonie d'une fonction peut se faire de plusieurs façons | 6 |
| 2. Monter les limites du tableau de variations (il ne donne que le sens de variation) / Montrer que le tableau de variations donne beaucoup d'informations mais pas toutes | 5 |
| 3. Montrer le lien entre le tableau de variations et la courbe | 4 |
| 4. Montrer qu'un tableau de variations ne permet pas de tracer exactement la courbe mais seulement de s'en faire une idée<br>Un même tableau peut être le tableau de variations de plusieurs fonctions | 3 |
| 5. Montrer qu'une courbe n'a qu'un seul tableau de variations, mais pas l'inverse | 2 |
| 6. Montrer que la courbe contient beaucoup d'informations | 2 |

Nous voyons bien que toutes ces réponses prennent en compte les connaissances portant sur le tableau de variations et ses limites et les liens entre tableau de variations et courbe.

### *Question 8c*

Pour cette question, chaque enseignant donne, comme pour question 7c, plusieurs réponses. La plupart des enseignants déclare d'envisager cet exercice comme « un exercice d'entraînement » (cité par 13 enseignants) ou comme « une partie d'un DS » (cité par 12 enseignants).

Les réponses « un exercice de réinvestissement » et « une partie de DM » sont cités, chacune, par 6 enseignants. 2 enseignants déclarent de l'envisager comme « une aide individualisé » ou comme « un exercice d'introduction ». Enfin, 2 enseignants disent qu'ils pourraient l'envisager comme « un exemple de cours ».

Contrairement à l'exercice précédent, la plupart des enseignants déclarent ainsi le considérer comme « un exercice d'entraînement ». Ils estiment donc qu'il fait partie des types de tâches importantes pour la notion étudiée, il peut même faire partie du rapport institutionnel des élèves puisque la réponse « une partie d'un DS » est citée par douze enseignants.

### *Question 8d*

Quant aux principales difficultés qu'un élève de 2$^{\text{nde}}$ pourrait rencontrer dans la résolution de cet exercice, 5 enseignants ne répondent pas à cette question et 3 enseignants disent que les élèves n'auront pas de difficulté dans la résolution de cet exercice et en plus l'un d'entre eux ajoute que les élèves font cet exercice assez facilement, même les plus faibles, ce qui confirme bien le caractère institutionnel de cet exercice.

Nous récapitulons les autres réponses par le tableau suivant :

| **Les difficultés des élèves selon les enseignants** | **Σ P** |
|---|---|
| 1. Envisager la seule possibilité de relier les points à la règle (ou ne tracer que la courbe d'une fonction affine par morceaux / l'influence de droite !) | 8 |
| 2. Le fait qu'il y a plusieurs solutions possibles (plusieurs réponses possibles au même exercice, ce n'est pas « mathématique » pour un élève de 2$^{\text{nde}}$) | 5 |
| 3. Erreur sur le placement des points dans le repère | 2 |

Remarquons ici que les deux arguments majoritaires ne sont pas du même type : la première raison est liée au savoir mathématique en jeu, alors que la deuxième est relative au contrat de la classe (unicité des solutions).

## Question 9

### *Question 9a*

Deux enseignants donnent une réponse utilisant des définitions partielles des extrema.

P11 : Si m est le minimum de g(x) $m\leq -7$
Si M est le maximum de g(x) $M\geq 41$ (langage formel)
P16 : La plus petite valeur est -7 ou un nombre inférieur à -7
La plus grande valeur est 41 ou un nombre supérieur à 41 (langage naturel)

18 enseignants disent qu'on ne peut pas répondre à ces questions. 6 d'entre eux n'utilisent aucun argument dans leur réponse. Voici les arguments utilisés par les autres :

- 2 donnent un contre-exemple à partir d'une représentation graphique.
- 3 donnent un contre-exemple à partir d'un tableau de variations et un autre précise qu'on a besoin d'un tableau de variations pour répondre à cette question.
- 5 précisent qu'il faut connaître le sens de variation de g sur cet intervalle.
- 1 enseignant donne un contre exemple numérique.

Ainsi, la plupart des enseignants, pour répondre à cette question, passent soit au registre graphique, soit au tableau de variations. Seul un enseignant donne un contre exemple numérique. Ceci nous montre que même si les enseignants ont des connaissances sur le tableau de valeurs (voir question 5), celles-ci sont vraiment liées aux autres registres.

Notons que deux enseignants répondent -7 et 41, un sans ajouter d'autre explication et l'autre en traçant un tableau de variations compatible avec le tableau de valeurs donné. Ils ne paraissent donc pas avoir vu le problème, ce qui explique qu'ils jugent l'intérêt de cet exercice quasi nul et qu'une lecture graphique ou un tableau de variations serait plus intéressant pour chercher les extrema d'une fonction. Ils déclarent ainsi qu'ils ne poseraient pas cet exercice dans leur classe.

***Question 9b***

8 enseignants répondent qu'ils ne poseraient pas cet exercice dans leur classe, 2 d'entre eux ne donnent aucune raison et les autres disent qu'il y a trop de connaissances sur la notion de variation qui sont exigées ou alors qu'il y a trop de possibilités qui déstabilisent les élèves. Certains arrivent même à dire que son intérêt est quasi nul et qu'il donne des idées fausses.

2 enseignants ne se prononcent pas et proposent de faire un changement dans les valeurs du tableau et ils préfèrent un tableau complet avec toutes les valeurs entières.

Les autres déclarent qu'ils poseraient cet exercice dans leur classe. Ils donnent, en général, deux types de raison : montrer l'intérêt d'un tableau de variations et montrer les limites d'un tableau de valeurs et en particulier que la connaissance de quelques images constitue une information très partielle de la fonction.

Finalement, les réponses sont très partagées sur cet exercice, ce qui montre qu'il ne fait certainement partie du rapport institutionnel de la classe de $2^{nde}$, ce qui est confirmé par les réponses à la question suivante.

*Question 9c*

Ceux qui n'envisagent pas à poser cet exercice dans leur classe ne répondent pas à cette question.

La réponse « une partie d'un DM » est apparue par 9 enseignants. Les réponses « un exercice de réinvestissement » et « un exercice d'entraînement » sont apparues, chacune, par 4 enseignants en enfin la réponse « un exercice d'introduction » est apparue par 3 enseignants.

Finalement, comme pour la question 7, la plupart des enseignants envisage cet exercice comme une partie d'un DM, il est plutôt considéré comme un exercice de recherche et est renvoyé au travail personnel des élèves.

*Question 9d*

5 enseignants n'ont pas donné une réponse à cette question et 2 autres enseignants précisent que les élèves auront les mêmes difficultés que celles de la question 7.

Voici les autres réponses qui prévoient les éventuelles difficultés des élèves de Seconde :

| **Les difficultés des élèves selon les enseignants** | **Σ P** |
|---|---|
| 1. Les élèves ne prennent en compte que les valeurs du tableau, d'où -7 et 41 | 9 |
| 2. Le tableau de valeurs se transformerait immédiatement en tableau de variations | 3 |
| 3. Ne penser qu'à une fonction affine par morceaux | 2 |
| 4. Certains élèves confondent plus petite valeur avec son image, d'où -7 et 34 | 1 |

Ce tableau montre que les enseignants sont conscientes sur le fait que leur rapport personnel est différent de celui des élèves sur l'utilisation (ou la connaissance) du tableau de valeurs.

En conclusion, nous constatons une fois de plus, comme pour la question 7, que cet exercice ouvert qui n'a pas une solution numérique mais qui a pour but de faire discuter les élèves n'est pas considéré par les enseignants comme conforme au rapport institutionnel. Comme pour la question 7, on peut donner deux types de raisons à cela : les connaissances mathématiques des enseignants ne leurs permettent pas d'envisager cette question ou bien le contrat de la classe ne permet pas d'avoir des exercices avec des réponses aussi ouvertes.

# CONCLUSION

Par ce questionnaire, nous avons tenté d'approfondir les choix didactiques effectués par les enseignants sur l'enseignement de la notion de fonction en $2^{nde}$. Pour cela, nous avons croisé deux types d'information : d'une part sur leurs conceptions, les définitions qu'ils donnent aux élèves et, d'autre part sur leur position vis-à-vis de certains exercices que les élèves ont eu à faire dans leur questionnaire. Le premier résultat montre qu'il y a une distance entre les choix de certains enseignants et les tendances du nouveau programme.

Les manuels que nous avions choisis d'analyser sont assez souvent cités par les enseignants comme le manuel de leur classe, ce qui montre la pertinence de l'analyse de ces manuels. Nous avons également constaté que certains d'entre eux utilisent le même découpage en chapitres et qu'ils attachent ainsi beaucoup d'importance au manuel de la classe. Ainsi, nous pouvons donc affirmer que les choix d'exercices proposés risquent d'être différents suivant les manuels utilisés et donc, que les tendances de certains manuels peuvent se retrouver dans la vie de la classe. Or, l'analyse des manuels (ch. B2) nous a montré qu'il y a une grande diversité dans ce qui est proposé dans l'introduction à la notion de fonction, donc on peut penser qu'il y aura une grande diversité dans les classes.

On trouve sur la définition de la notion de fonction une grande uniformité dans les réponses des enseignants qui montrent donc un attachement aux directives du programme. La plupart des enseignants donnent ainsi à leurs élèves une définition d'une fonction plus ou moins « conforme » au système de contraintes institutionnelles étudiées à partir des manuels et du nouveau programme : il s'agit effectivement pour eux de présenter ou de faire émerger la fonction en tant que loi de variation. Néanmoins, il y a plus de diversité dans les conceptions propres des enseignants. En effet, environ la moitié d'entre eux montrent qu'ils restent attachés à une définition ensembliste en termes de relation de la notion de fonction. Il est clair que ce phénomène touche plus systématiquement les enseignants les plus âgés qui semblent donc marqués par l'enseignement qu'ils ont reçu, voire par leurs premières années d'enseignement. Nous nous demandons alors dans quelle mesure cet écart entre leur propre conception et la définition officielle qu'ils donnent à leurs élèves peut influencer leur enseignement ?

En ce qui concerne le tableau de valeurs, la plupart des enseignants pensent que cet objet ne nécessite pas d'être défini et que son utilisation va de soi. Il reste un outil que ne sert qu'à tracer des courbes. Par contre, ce n'est pas la même chose pour le tableau de variations qui est considéré comme indispensable pour l'étude des fonctions. Pourtant, aucun enseignant ne dégage de connaissance ni sur sa construction, ni sur les codes et les codages qu'on utilise dans un tableau de variations. Il semble que, comme pour le tableau de valeurs, les connaissances sur les tableaux de variations restent transparentes et ne fassent donc pas l'objet d'un enseignement explicite.

Parmi les exercices que nous avons proposés aux professeurs, nous avons constaté que ceux qui concernent le tableau de valeurs sont beaucoup plus discutés que ceux concernant le tableau de variations, alors que les deux relèvent de la conversion de registre. Ainsi les exercices que nous avons proposés dans lesquels le tableau de valeurs intervient sont peu choisis par les professeurs.

Ceci nous parait être un point important qui relève à la fois du savoir mathématique et du contrat didactique et qui sont révélateurs de la pratique. En effet, un des exercices proposés concernant le tableau de valeurs permettait, selon nous, à partir d'un tableau de valeurs, de discuter d'éléments relatifs à la notion de fonction sans apporter une réponse directe. Du fait du caractère particulier de l'objet tableau de valeurs, les questions posées dans cet exercice n'admettent pas une réponse « classique », à savoir unique ou numérique. On a vu que cet exercice est majoritairement rejeté et que s'il est accepté c'est comme partie d'un devoir à la maison, c'est-à-dire en dehors de la responsabilité du professeur.

On peut penser que les pratiques habituelles des professeurs de mathématiques actuels laissent encore peu de place à des exercices qui pourraient permettre de problématiser certaines notions et de les discuter pour faire avancer les connaissances des élèves.

Maintenant que nous avons constaté une distance entre les choix de certains enseignants et les tendances du nouveau programme et donc la difficulté de mise en place des certains nouveautés du programme dans leurs classes, il nous reste à avoir une idée plus précise sur ce que les élèves ont réellement appris pour compléter notre tentative d'état des lieux sur l'étude des fonctions. C'est ce que nous abordons dans le chapitre suivant.

# CHAPITRE B4

# Questionnaire des élèves

## I. Introduction

Au-delà des choix des enseignants dans la préparation de leurs cours et l'organisation du travail de l'élève, notre tentative d'état des lieux n'aurait pas été complète, si nous n'avions pas interrogé les élèves eux-mêmes afin de voir ce qui avait été réellement appris. Nous avons ainsi élaboré un questionnaire en nous basant sur l'analyse institutionnelle réalisée précédemment. Il vise ainsi à interroger leurs capacités à résoudre différentes tâches mettant en jeu l'utilisation des tableaux de valeurs et de variations, en particulier au regard de la conversion dans d'autres registres (intra-tableaux, graphique, algébrique).

Nous avons élaboré deux questionnaires parallèles pour éviter que deux élèves côte à côte ne copient l'un sur l'autre. De fait, cette dualité de questionnaires nous a permis de proposer quelques variations autour d'une même question soit en changeant les caractéristiques du tableau donné, soit en changeant le registre de sortie demandé.

## II. Analyse a priori

### Question 1

Elle concerne le changement du registre tableau de valeurs vers le registre tableau de variations (questionnaire 1A) ou vers le registre graphique (questionnaire 1B). A partir d'un tableau de valeurs, on demande à l'élève de donner un tableau de variations possible (1Aa) ou une courbe possible (1Ba), puis on lui demande s'il en existe d'autres (questions 1Ab et 1Bb).

**1A.** Soit une fonction f définie sur l'intervalle [-2 ; 2] dont on connaît les valeurs suivantes,

| ***x*** | *-2* | *-1* | *0* | *1* | *2* |
|---|---|---|---|---|---|
| ***f(x)*** | *-3* | *-1* | *1* | *3* | *5* |

a. Donner un tableau de variations possible pour f.

b. Est-ce qu'on pourrait en trouver un autre ? Si oui, lequel ? Si non, expliquer.

**1B.** Soit une fonction f définie sur l'intervalle [-2 ; 2] dont on connaît les valeurs suivantes,

| ***x*** | *-2* | *-1* | *0* | *1* | *2* |
|---|---|---|---|---|---|
| ***f(x)*** | *-5* | *-3* | *-1* | *1* | *3* |

a. Tracer une représentation graphique possible pour f.

b. Est-ce qu'on pourrait en tracer une autre ? Si oui, laquelle ? Si non, expliquer.

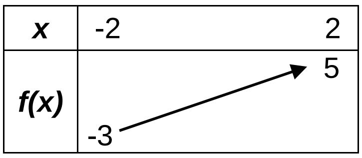
Une variable didactique importante concerne la nature du tableau de valeurs proposé. Dans les deux cas, nous avons choisi de donner un tableau de valeurs classique (toutes les valeurs entières de x, pas constant, intervalle symétrique par rapport à O, cinq valeurs, valeurs de f(x) entières).

De plus, les valeurs de f(x) sont toutes dans un ordre croissant, et peuvent même représenter une fonction affine (f(x) = 2x + 1 pour le questionnaire 1A et f(x) = 2x - 1 pour le questionnaire 1B). Ce choix rend la question a) particulièrement simple.

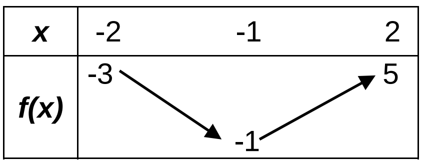
## Questions 1Aa et 1Ba

### *Question 1Aa*

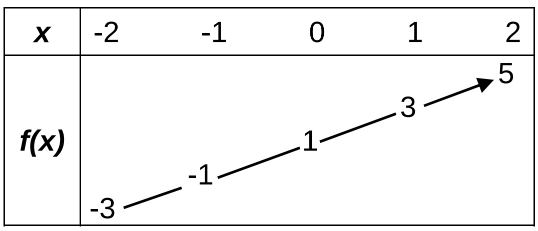
- L'élève devrait immédiatement donner le tableau de variations attendu tant le modèle croissant est fort (**codé 1**).



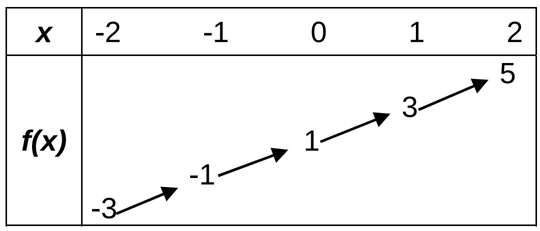

- Cependant il se peut que certains élèves soient gênés par les valeurs négatives de f(x) et voient une décroissance de f(-2) = -3 à f(-1) = -1. Ceci peut être renforcé par un effet de contrat qui les pousse à penser que la réponse doit être plus complexe qu'une fonction seulement croissante (**codé neg**).




- Une autre difficulté possible consiste à accepter de perdre l'information des valeurs en 1, 0 et 1, non pertinente pour le tableau de variations. Dans ce sens, certains élèves risquent de donner un tableau de variations correct mais comportant en plus les valeurs en -1, 0 et 1 (**Codé valsupp**).




ou




- Dans le même ordre d'idée, certains élèves peuvent aller jusqu'à découper le tableau de variations en quatre cases comportant chacune une flèche (**codé varloc)**. Notons que cette difficulté peut se superposer à la première (**neg**).

| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | -3 | ↗ -1 | ↗ 1 | ↗ 3 | ↗ 5 |

ou

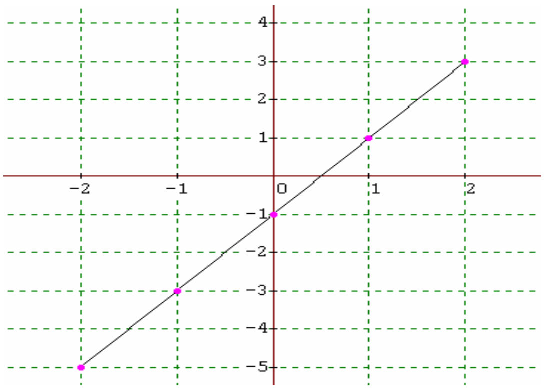
| x | -2 -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| f(x) | -3 ↗ -1 | -1 ↗ 1 | 1 ↗ 3 | 3 ↗ 5 |

Ces deux derniers types de réponses semblent vouloir dire que ces élèves n'ont pas encore saisi l'aspect global des variations d'une fonction et par conséquent la spécificité du tableau de variations, avec des degrés différents. Ainsi, les réponses codées « **valsupp** » indiquent certainement que les élèves ont du mal à abandonner certaines informations lors du passage au tableau de variations alors que les réponses codées « **varloc** » montrent plutôt une conception non suffisamment globale de la fonction. Dans les deux cas, les élèves ont du mal à distinguer la nature et la fonction du tableau de valeurs et du tableau de variations.

- Comme l'a montré notre analyse de manuels, ce type de conversion est peu travaillé (il n'est pris en compte que dans un seul manuel Fractale dans « Zoom sur le cours » et dans les exercices 2 fois). Ainsi, certains élèves, gênés par la nouveauté de cette tâche, risquent d'éprouver la nécessité de passer par une représentation graphique ou algébrique (cf analyse question b) **(codé graph ou alg)**. Cependant, ceci ne sera pas toujours visible au niveau des observables puisque les élèves peuvent passer par ce mode de représentation mentalement (aspect privé), Ici le brouillon avait été interdit.

***Question 1Ba***

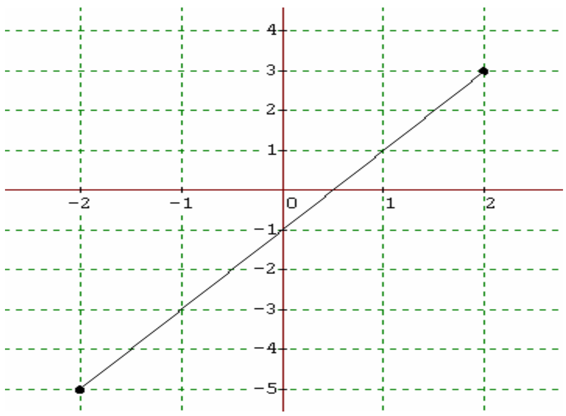
- Ici la tâche de conversion est au contraire très classique, on peut penser que la majorité des élèves va placer les cinq points dans un repère. S'ils ne font pas d'erreurs de placement, ils devraient voir sans difficulté la droite (le pas est régulier, les points sont rapprochés) **(codé 1).**




Cependant plusieurs types d'erreurs peuvent interférer et même si elles ne sont pas forcément importantes pour cette question a), elles auront des conséquences sur la façon d'aborder la question suivante (question b) :

- Certains élèves peuvent se tromper dans le placement d'un ou plusieurs points et obtenir une courbe qui n'est pas une droite soit en joignant les points par des segments soit en essayant de tracer une courbe lisse (**codé errgraph**).

- Certains élèves peuvent inverser x et f(x) dans leur tracé ce qui revient à une confusion entre image et antécédent et une difficulté de lecture coordonnée entre tableau de valeurs et graphique : c'est un dysfonctionnement dans la conversion entre les deux registres **(codé im/ant).**
- Certains élèves peuvent imaginer un tableau correspondant à une fonction affine et tenter de trouver l'équation de la fonction avant son tracé (ceci peut être accentué par l'habitude prise en classe de $3^{\text{ième}}$ et par la simplicité des valeurs données). Cependant, ceci peut entraîner diverses erreurs de calcul, mais conduira toujours au tracé d'une droite **(codé alg).**
- Le modèle de la fonction affine étant suffisamment prégnant, on peut penser que certains élèves vont prendre en compte seulement deux couples de valeurs et tracer un segment à partir de ces deux points. Cette procédure sera très difficile à détecter au niveau des observables. Nous privilégierons cette explication lorsqu'il n'y a que deux points visibles sur le graphique **(codé aff).** Ils donneront alors des réponses du type :




## Questions 1Ab et 1Bb

### *Question 1Ab*

Comme nous l'avons vu dans l'analyse des manuels, on insiste peu sur l'idée qu'à un tableau de valeurs on peut correspondre plusieurs tableaux de variations (cette question n'est soulevée que dans Fractale). Par ailleurs, la plupart des enseignants interrogés sur cette question précisent que les élèves ont tendance à ne prendre que des valeurs entières pour la variable x et qu'ils n'imaginent pas qu'il peut se passer quelque chose entre deux valeurs entières. Ainsi, nous pensons que la plupart des élèves vont avoir des difficultés pour arriver à donner un autre tableau de variations.

- Ici le modèle affine très prégnant va renforcer l'idée qu'il n'y a qu'un tableau de variations possible. Les élèves peuvent ainsi donner des réponses du type "non, car il n'y a qu'une seule droite qui correspond à ce tableau" **(codé aff)**.
- De plus, le modèle tout croissant est difficile à dépasser, d'autant qu'ayant donné toutes les valeurs de la fonction pour les valeurs entières de x, il sera très difficile pour l'élève d'imaginer un comportement non croissant entre deux valeurs successives. Dans ce cas,

les élèves peuvent ainsi donner des réponses du type : « Non car sur l'intervalle [-2; 2], la courbe n'a pas de variation, elle n'est que croissante. » **(codé croiss)**.

- Les élèves peuvent être tout simplement persuadés qu'ayant ce tableau de valeurs il existe une et une seule fonction. Ceci peut être accentué par l'insistance en début de seconde faite sur l'unicité de l'image pour une valeur de x donnée. Les élèves donneront alors des réponses du type : « Non car x a pour seule image f(x). » **(codé unic)**.
- Certains élèves peuvent répondre «non » sans justification **(codé non)**.
- Certains élèves peuvent répondre «oui » sans justification **(codé oui)**.
- Certains élèves peuvent croire donner une autre réponse en donnant le même tableau de variations ne comportant que des différences non pertinentes (par exemple, rajout ou suppression des valeurs - 1, 0 ou 1, découpage de la flèche ou recollement des quatre flèches (**codé nonpert)**.
- Certains élèves peuvent répondre « oui car on ne sait pas ce qui se passe entre les différentes valeurs de x » mais n'arrivent pas à produire un autre tableau de variations. Ces élèves montrent un certain degré de compréhension, mais n'ont pas encore une maîtrise suffisante du tableau de variations pour répondre correctement **(codé presque).**
- Un autre tableau de variation correct sera **codé 1.**

De la même façon qu'à la question précédente, nous pouvons penser que, pour répondre à cette question correctement ou non, certains élèves vont passer par une représentation graphique ou essayer de trouver une expression algébrique **(codé graph ou alg)**. Nous n'aurons que peu d'indices sur cette procédure sauf si l'élève trace effectivement une courbe ou bien s'il en rend compte dans ses explications.

***Question 1Bb***

Notre analyse des manuels a montré qu'on insiste très peu sur le fait qu'à un tableau de valeurs peut correspondre plusieurs représentations graphiques (ceci n'est pris en compte que dans un seul manuel « Fractale » dans « Zoom sur le cours », dans les modules et dans 2 exercices).

- Comme dans le cas de la question 1A, le modèle affine va renforcer l'idée qu'il n'y a qu'une représentation graphique possible. Les élèves peuvent ainsi donner des réponses du type « non, car c'est une fonction affine et qui présente une seule droite » **(codé aff)**.
- Le modèle tout croissant et le fait d'avoir donné toutes les valeurs de la fonction pour les valeurs entières de x tendent à empêcher les élèves d'imaginer une courbe ayant un comportement « atypique » entre deux valeurs successives de x. Dans ce cas, ils peuvent donner des réponses du type « non, car sur l'intervalle [-2 ; 2], la courbe n'est que croissante » **(codé croiss)**.
- Les élèves peuvent être tout simplement persuadés qu'il existe une et une seule fonction. Ceci peut être accentué par l'insistance en début de seconde faite sur l'unicité de l'image pour une valeur de x donnée. Les élèves donneront alors une réponse du type « non, car à chaque réel x, on associe une et une seule image. » **(codé unic)**.

- Certains élèves peuvent répondre « non » sans justification **(codé non)**.
- Certains élèves peuvent répondre « oui » sans justification **(codé oui).**
- Certains élèves peuvent répondre « oui on peut en tracer une autre, car nous n'avons pas de coordonnées de points autre que ceux-ci » mais n'arrivent pas à produire une autre représentation graphique. Ces élèves montrent un certain degré de compréhension, mais n'ont pas encore une maîtrise suffisante de la représentation graphique pour répondre correctement **(codé presque).**
- Une autre représentation graphique correcte sera **codée 1**.

## Question 2

Cette question ne comporte pas de changement de registre explicite et a priori n'en nécessite pas. Il s'agit d'un traitement dans le registre tableau de valeurs. On demande à l'élève de donner la plus grande et la plus petite valeur prises par la fonction connue par un tableau de valeurs. Notre analyse des manuels a montré que le tableau de valeurs est toujours lié soit au registre algébrique soit au registre graphique ou soit à un contexte extra-mathématique. D'autre part, l'analyse des réponses des enseignants sur cette question montre qu'elle ne fait pas réellement partie du rapport institutionnel de la classe de 2^nde puisque le contrat de la classe ne permet pas d'avoir des exercices avec des réponses aussi ouvertes. Dans ce sens, on peut considérer cette question comme peu habituelle, voire hors contrat.

**2A.** Soit une fonction g définie sur l'intervalle [-2 ; 14] dont on connaît les valeurs suivantes,

| **x** | -2 | 3 | 8 | 14 |
|---|---|---|---|---|
| **g(x)** | -7 | 41 | 7 | 34 |

Quelle est, à votre avis, la plus petite valeur prise par g sur l'intervalle [-2 ; 14] ? Expliquer.
Quelle est, à votre avis, la plus grande valeur prise par g sur l'intervalle [-2 ; 14] ? Expliquer.

**2B.** Soit une fonction g définie sur l'intervalle [-4 ; 4] dont on connaît les valeurs suivantes

| **x** | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **g(x)** | -1 | 0 | 7,5 | -1 | -2 | 2 | 6 | 8 | 9 |

Quelle est, à votre avis, la plus grande valeur prise par g sur l'intervalle [-4 ; 4] ? Expliquer.
Quelle est, à votre avis, la plus petite valeur prise par g sur l'intervalle [-4 ; 4] ? Expliquer.

Une variable didactique importante concerne la nature du tableau de valeurs proposé. Dans le cas de la question 2A, nous avons choisi de donner un tableau de valeurs qui est presque un tableau de variations ; en effet, les valeurs qui apparaissent dans ce tableau peuvent apparaître comme les valeurs pertinentes du tableau de variations pour les élèves. Dans le deuxième cas (question 2B), le tableau de valeurs proposé est « complet » au sens où toutes les valeurs entières de la variable sont prises en compte, de plus, il y a un pas régulier, ses valeurs sont symétriques par rapport à 0.

Ici, il y a trois grands types de réponses :

1. L'élève envisage qu'il peut y avoir d'autres valeurs hors du tableau. Ces élèves ont donc compris que le tableau de valeurs ne donne que des indications partielles sur la fonction.

2. L'élève ne sort pas des valeurs du tableau, mais a une vision correcte de la notion d'extremum dans cette limite.

3. L'élève reste aussi dans les valeurs du tableau mais montre en plus des difficultés dans la compréhension de la notion d'extremum, voir d'image et d'antécédent.

La bonne réponse consiste à dire qu'on ne peut pas connaître les valeurs extrémales à partir de ce tableau. On peut le justifier en utilisant les types d'arguments suivants :

- « On ne peut pas savoir » sans autre argument **(codé1/0-justif)**.
- « On ne peut pas savoir, car on ne connaît pas l'expression algébrique de la fonction. ». Cet argument n'est pas pertinent **(codé 1/0-alg)**.
- « On ne peut pas savoir, car on ne sait pas comment varie la fonction. » **(codé1/0-var)**.
- « On ne peut pas savoir, car on ne sait pas comment varie la fonction. » en illustrant sur un contre-exemple à partir d'une courbe **(codé 1/graph)**.
- « On ne peut pas savoir, car on ne sait pas comment varie la fonction. » en illustrant sur un contre-exemple à partir d'un tableau de variations **(codé 1/tvr)**.
- « On ne peut pas savoir, car il nous manque des valeurs. ». L'élève peut alors s'arrêter à cette justification **(codé 1/0-val)** ou rajouter un argument plus convaincant du type : « la fonction peut varier entre deux valeurs du tableau » et aller jusqu'à donner un contre-exemple numérique (par exemple, f(9) peut être inférieur à –7)» **(codé 1/val)**.
- Certains élèves peuvent donner une réponse dans les valeurs du tableau en précisant quand même qu'on ne peut pas savoir s'il y avait une plus grande/petite valeur. Ils donneront alors une réponse du type «la plus grande/petite valeur est inconnue car on ne sait pas la variation de la fonction. Mais, dans le tableau, la plus grande/petite valeur est –7/41 (question A) » **(codé 1/2).**

  Ceci montre que pour certains élèves la réponse « on ne peut pas savoir » ne peut pas être considérée comme une réponse et ils se sentent ainsi obliger de donner une réponse « numérique » (effet de contrat).

L'élève peut répondre que la plus grande valeur est selon le questionnaire A ou B 41 ou 9 et la plus petite –7 ou –2. Ceci peut être plus ou moins argumenté. C'est en fait la réponse attendue ! Notons qu'ici certains élèves peuvent confondre dans leur réponse les valeurs de f et de x. C'est une erreur classique que nous ne prendrons pas en compte ici.

- Certains élèves donne cette réponse sans explication **(codé 2)**.
- Certains élèves répondent en ne comparant que les valeurs du tableau. Ils peuvent donc donner une réponse du type : « car c'est la plus grande/petite valeur dans le tableau » ou « car c'est la plus grande/petite valeur (le maximum / le minimum) dans le ligne de la fonction» **(codé 2/val)**.

- Certains élèves peuvent passer par une représentation graphique ou un argument sur les variations, voire par un tableau de variations pour répondre à cette question. Ils utiliseront alors un argument du type « car la courbe passe par ces points et le point la plus bas/haut de la droite » ou « on remonte à … puis l'on redescend à … » ou ils tracent effectivement une courbe ou un tableau de variations **(codés 2/graph, 2/var ou 2/tvr)**.

Enfin, certains élèves, tout en restant dans les valeurs du tableau, montrent des dysfonctionnements importants sur les notions d'extremum ou d'image et d'antécédent, ce qui peut être accentué par l'effet « hors-contrat » de la question.

- Une réponse possible, consiste à confondre la plus grande et la plus petite valeur de la fonction par les valeurs prises par la fonction aux bornes de l'intervalle (prégnance du modèle croissant) ce qui revient à prendre la première et la dernière valeurs de la deuxième ligne du tableau. Ceci peut aller jusqu'à donner les bornes elles-mêmes comme réponse. **(codé 3/bornes).**
- Certains élèves peuvent donner comme réponse la plus grande et la plus petite de toutes la valeurs des deux lignes du tableau « car c'est la plus grande/petite valeur dans les deux lignes du tableau » **(codé 3/ttchiffr).**
- L'élève peut donner la réponse (-7 : 7) pour 2A en disant que le 41 et 34 sont trop grandes (**codé 3/taille**)
- Enfin l'élève peut donner la réponse (7,5 : -2) pour 2B puisque le 9 correspond l'un de valeur de l'intervalle ou le « 7,5 » est la seule valeur décimale **(codé 3/décim)**.

## Question 3

Elle concerne le traitement d'un tableau de valeurs dans un contexte de la vie courante. On donne les valeurs de deux actions au premier jour de chaque mois, pendant six mois. A partir de ces informations, on demande alors à l'élève de dire si les deux valeurs peuvent être égales à un moment donné et, si oui, quand.

Comme nous l'avons vu dans l'analyse des manuels, on utilise habituellement des tableaux de valeurs pour deux types de tâches différents :

1. Comme un outil qui permet de tracer de façon précise la courbe représentative d'une fonction (passage entre le registre algébrique et le registre graphique).

2. Comme un résumé d'une situation de la « vie courante », pour décrire une relation entre deux grandeurs. Dans ce cas, on demande plutôt de passer au registre graphique en précisant de joindre les valeurs du tableau soit avec des segments de droite soit le plus régulièrement possible.

Dans les deux cas, on passe au registre graphique pour répondre à certaines questions. Ici, il s'agit de répondre directement à partir d'un tableau de valeurs. Dans ce sens, on peut considérer cette question comme peu habituelle.

**3A.** Le tableau ci-dessous donne les cours, en euros, de deux actions au premier semestre 2002 (valeurs de l'action à l'ouverture de la bourse le premier jour ouvrable de chaque mois).

| mois / action | janvier | février | mars | avril | mai | juin |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **$A_1$** | 12,18 | 12,41 | 10,27 | 11,05 | 9,95 | 10,51 |
| **$A_2$** | 9,61 | 8,87 | 11,78 | 13,49 | 11,78 | 10,89 |

A votre avis, est-ce qu'il est possible qu'à un moment donné les cours de ces deux actions aient été identiques ? Si oui, combien de fois ? et quand ? Si non, expliquer.

**3B.** Le tableau ci-dessous donne les cours, en euros, de deux actions au premier semestre 2002 (valeurs de l'action à l'ouverture de la bourse le premier jour ouvrable de chaque mois).

| mois / action | janvier | février | mars | avril | mai | juin |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **$A_1$** | 7,3 | 7,8 | 6,5 | 8,1 | 9,2 | 8,8 |
| **$A_2$** | 10,1 | 10,4 | 9 | 7,5 | 7,2 | 8,1 |

A votre avis, est-ce qu'il est possible qu'à un moment donné les cours de ces deux actions aient été identiques ? Si oui, combien de fois ? et quand ? Si non, expliquer.

Une variable didactique concerne la nature du tableau de valeurs proposé. Dans le questionnaire A, les valeurs de la fonction sont des décimaux à deux chiffres après la virgule, alors que dans le questionnaire B, ils n'en ont qu'un. Cela peut faire une différence si les élèves veulent tracer la courbe de la fonction notamment.

Ici, le point essentiel consiste à voir qu'il y a au moins un croisement des valeurs (en supposant un changement continu des valeurs dans la période). L'élève peut alors aller jusqu'à dire que ce changement est certain mais qu'il peut y en avoir d'autres sachant qu'entre deux dates du tableau tout est possible. Enfin si l'élève en reste à un modèle discret il ne verra pas la possibilité d'égalité des deux valeurs.

La réponse majoritaire attendue est :

« Oui, une fois entre février et mars » pour 3A et « oui, une fois entre mars et avril » pour 3B. Cette réponse peut être plus ou moins argumentée :

- Certains élèves peuvent donner cette réponse sans justification **(codé 2/0-justif)**.
- Certains élèves vont passer par une représentation graphique. Ils tracent ainsi deux courbes « lisses » correspondant aux valeurs du tableau ou ils donneront des réponses du type « si on trace leur courbe, elles vont se croiser à cette date » sans les tracer (représentation mentale). Ils donneront donc cette réponse en pensant au croisement des deux courbes **(Codé 2/graph).**
- Les élèves peuvent utiliser le changement de sens des valeurs des actions pour donner cette réponse. Ils donneront alors des réponses du type « car on s'aperçoit que les valeurs de A1 sont supérieures à celles de A2 durant janvier et février puis à partir de mars, les valeurs de A1 sont inférieures aux valeurs de A2 (question A)» **(codé 2/sens)**.

- Certains élèves peuvent donner cette réponse en ajoutant qu'il est possible qu'il y ait d'autres croisements à d'autres dates. Ils donneront donc des réponses du type « oui, une fois entre février et mars. Mais peut-être que les autres mois, il y a eu des variations importantes et qu'elles ont été identiques » **(codé 2+)**

Ces élèves montrent une compréhension fine de la partialité des informations données par un tableau de valeurs.

Certains élèves peuvent répondre en s'appuyant sur le contexte concret :

- Ils peuvent dire que les valeurs des actions peuvent varier tout le temps et ainsi ces deux actions peuvent être identiques mais sans savoir quand et combien de fois. Ils donneront donc une réponse du type «oui, autant de fois (ou tous les mois) car elles peuvent forcément augmenter ou diminuer d'un jour à l'autre. Mais on ne peut pas déterminer quand et combien de fois». **(codé +/context)**.
- Mais ils peuvent aussi, toujours en s'appuyant sur le contexte, donner des réponses non pertinentes du type « non, ce n'est pas possible car les actions dépendent de l'offre de la demande. Il y a une seule exception s'il y a la même demande et la même offre pour les deux actions» **(codé 0/context)**.

Certains élèves ne vont s'appuyer que sur les valeurs données dans le tableau :

- Certains élèves diront « non » en ne comparant que des valeurs du tableau. Ils donneront ainsi une réponse du type « non, car sur ce tableau aucun chiffre n'est pareil » ou « non car il n'a jamais le même gain de cours pour chaque mois » **(codé nonchiff)**.
- Certains élèves peuvent croire qu'elles sont identiques si leurs valeurs sont très rapprochées l'une de l'autre. Ils donneront donc une réponse du type « oui en juin car elles sont très proches comme valeurs » ou « oui, après juin car on voit que les deux actions sont presque identiques en juin, donc en juillet elles vont être identiques» **(codé proche)**.

Enfin des réponses plus erratiques risquent de surgir :

- Certains élèves, pour qui, il est impossible de concevoir d'autres fonctions que les fonctions affines, peuvent essayer de voir la proportionnalité des valeurs du tableau. Ils donneront donc des réponses du type « oui, c'est possible car les valeurs ne sont pas proportionnelles. Donc, les droites ne sont pas parallèles, donc elles se coupent.» **(codé aff)**.
- Certains élèves peuvent dire 2 fois (pour A) ou 3 fois (pour B) puisque leurs valeurs changent de sens, c'est à dire l'une baisse quand l'autre monte **(codé +sens).**
- Les réponses « oui » et « non » sans justification seront codées **oui-0justif** et **non-0justif**. Ainsi que la réponse « on ne peut pas savoir » sans donner d'autre explication sera codée **1/0-justif**.

## Question 4

Elle concerne le changement du registre tableau de variations vers le registre graphique (questionnaire A) ou vers le registre tableau de valeurs (questionnaire B). A partir d'un tableau de variations, on demande à l'élève de donner une courbe possible (4Aa) ou un tableau de valeurs possible (4Ba), puis on lui demande s'il en existe d'autres (questions 4Ab et 4Bb).

**4A.** Soit une fonction h définie sur l'intervalle [-3 ; 3] et son tableau de variations :

| ***x*** | -3 | -1 | 0 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| ***h(x)*** | 1 | 2 | 0 | 4 | 9 |

a. Tracer une représentation graphique possible pour h.

b. Est-ce qu'on pourrait en tracer une autre ? Si oui, laquelle ? Si non, expliquer.

**4B.** Soit une fonction h définie sur l'intervalle [-3 ; 3] et son tableau de variations :

| ***x*** | -3 | -2 | 0 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| ***h(x)*** | 9 | 4 | 0 | 2 | -1 |

a. Donner un tableau de valeurs possible pour h.

b. Est-ce qu'on pourrait en donner un autre ? Si oui, lequel ? Si non, expliquer.

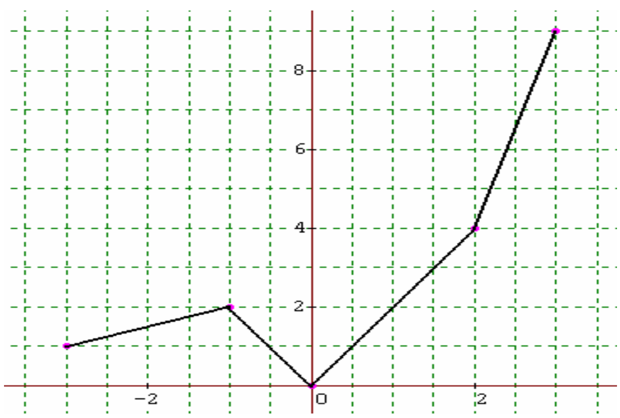
## Questions 4Aa et 4Ba

### *Question 4Aa*

Ici, il s'agit d'une tâche de conversion qui est très classique. Cette tâche est abordée par tous les manuels analysés et elle est d'ailleurs explicitement demandée par le programme actuel :

> « Décrire, avec un vocabulaire adapté ou un tableau de variations, le comportement d'une fonction définie par une courbe. Dessiner une représentation graphique compatible avec un tableau de variations. »

On peut penser que la majorité des élèves va tracer une courbe correspondante en joignant les cinq points soit avec des segments de droite soit la plus régulièrement possible (**codé 1**). Ils donneront donc des réponses du type :



Cependant plusieurs types d'erreurs peuvent interférer et même si elles ne sont pas forcément importantes pour cette question a), elles auront des conséquences sur la façon d'aborder la question suivante (question b) :

- Certains élèves peuvent se tromper dans le placement d'un ou plusieurs points **(codé errgraph)**.
- Certains élèves peuvent inverser x et f(x) dans leur tracé ce qui revient à une confusion entre image et antécédent et dont c'est un dysfonctionnement dans la conversion entre les deux registres **(codé im/ant)**.

### *Question 4Ba*

- L'élève devrait immédiatement donner le tableau de valeurs attendu avec les cinq valeurs du tableau de variations **(codé 1)**. Cependant il se peut que certains élèves ajoutent d'autre valeurs compatibles avec ce tableau de variations **(codé 1/supp)**. Ils donneront alors des réponses du type :

| ***x*** | **-3** | -2,5 | **-2** | **0** | 0,5 | **1** | **3** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***h(x)*** | **9** | 6 | **4** | **0** | 1 | **2** | **-1** |

- Certains élèves essaient de donner un tableau de valeurs « complet » avec toutes les valeurs entières (-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3) en respectant le sens de variation de la fonction. Ceci peut être renforcé par un effet de contrat qui les pousse à penser qu'un tableau de valeurs doit comporter toutes les valeurs entières (effet encore renforcé par l'usage de la calculatrice) **(codé 1/complet)**. Ils donneront ainsi des réponses du type :

| ***x*** | **-3** | **-2** | -1 | **0** | **1** | 2 | **3** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***h(x)*** | **9** | **4** | 2 | **0** | **2** | 1 | **-1** |

- Certains élèves peuvent donner un tableau de valeurs avec la moitié des valeurs du tableau de variations pour pouvoir en donner un autre pour la question b **(codé 1/moitié)**. Ils donneront donc une réponse du type :

| ***x*** | 0 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|
| ***h(x)*** | 0 | 2 | -1 |

ou

| ***x*** | -3 | -2 | 0 |
|---|---|---|---|
| ***h(x)*** | 9 | 4 | 0 |

## Questions 4Ab et 4Bb

### *Question 4Ab*

Notre analyse des manuels a montré qu'on insiste seulement dans la moitié des manuels analysés sur le fait qu'un tableau de variations peut correspondre à plusieurs représentations graphiques. Nous constatons également à partir de l'analyse des réponses des enseignants que cette question fait partie des types de tâches importants pour la notion étudiée, par contre ils prévoient que certains élèves envisageront la seule possibilité de relier les points à la règle (influence des droites) et qu'ils peuvent être perturbés du fait qu'il y a plusieurs solutions possibles pour une question. Ainsi, certains enseignants considèrent cette question comme « hors contrat ».

- On peut donc penser que la plupart des élèves va tracer une autre représentation graphique **(codé 1)**. Mais certains élèves peuvent tracer une autre courbe sans respecter le sens de variation de la fonction **(codé 1/errsens)**.
- Cependant certains élèves peuvent être persuadés qu'ayant ce tableau de variations il n'existe qu'une seule représentation graphique. Ceci peut être accentué par le fait qu'une fonction a un seul tableau de variations. Ils donneront ainsi une réponse du type « non, car on connaît le tableau de variations exact » ou « non, car le tableau de variations est trop précis et définit une seule fonction » **(codé unictvr)**.
- Certains élèves peuvent dire qu'il n'y a qu'une seule fonction. Ceci peut être accentué par l'insistance en début de Seconde faite sur l'unicité de l'image pour une valeur de x donnée. Les élèves donneront alors une réponse du type « non, une fonction n'a qu'une représentation graphique » **(codé unic).**
- Certains élèves peuvent répondre « oui car les points entre les valeurs de x peuvent varier » ou « oui si elle passe par tous les points donnés et qu'elle respecte le tableau de variations » mais n'arrivent pas à tracer une autre représentation graphique. Ces élèves montrent un certain degré de compréhension, mais n'ont pas encore une maîtrise suffisante de la représentation graphique pour répondre correctement **(codé presque)**.
- Les réponses « oui » et « non » sans justification seront codées **oui-0justif** et **non-0justif**.

### *Question 4Bb*

Comme nous l'avons vu dans l'analyse des manuels, on insiste habituellement très peu sur l'idée qu'à un tableau de variations peut correspondre plusieurs tableaux de valeurs (ceci n'est pris en compte que dans un seul manuel « Fractale »).

- L'élève peut donner un autre tableau de valeurs en ajoutant quelques valeurs en plus de cinq valeurs contenues dans le tableau de variations **(codé 1)**.
- Cependant certains élèves peuvent ne pas utiliser les cinq valeurs du tableau de variations et ils cherchent des nouvelles valeurs compatibles au tableau de variations **(codé 1/sscinq)**. Ils donneront alors des réponses du type :

| | | |
|---|---|---|
| ***x*** | -1 | 0,5 |
| ***f(x)*** | 2 | 1 |

- Certains élèves peuvent donner un autre tableau de valeurs en supprimant certaines valeurs du tableau de variations **(codé valsuprim)**. Ils donneront alors des réponses du type :

| *x* | -3 | 0 | 3 |
|---|---|---|---|
| *f(x)* | 9 | 0 | -1 |

- Certains élèves peuvent répondre « oui on ne peut savoir avec ce tableau de variations comment la fonction évolue entre les points donnés » mais n'arrivent pas à produire un autre tableau de valeurs. Ces élèves montrent un certain degré de compréhension, mais n'ont pas encore une maîtrise suffisante du tableau de valeurs pour répondre correctement **(codé presque).**
- Les élèves peuvent être tout simplement persuadés qu'ayant ce tableau de variations il existe une et une seule fonction. Ceci peut être accentué par l'insistance en début de seconde faite sur l'unicité de l'image pour une valeur de x donnée. Les élèves donneront alors des réponses du type : « non car à x n'est associé qu'un seul nombre » **(codé unic)**.
- Certains élèves qui utilisaient la moitié des valeurs du tableau pour la question a), donnent un autre tableau de valeur avec le reste des valeurs **(codé moitié)**.
- Les réponses « oui » et « non » sans justification seront codées **oui-0justif** et **non-0justif**.

# III. Analyse a posteriori des réponses des élèves

En nous appuyant sur notre analyse a priori, nous présentons une analyse globale des réponses des élèves, puis une analyse classe par classe, et enfin nous essaierons de dégager quelques profils types d'élèves.

Le test a été passé, pendant une séance (environ 40 minutes), dans 10 classes différentes réparties dans 6 établissements et de niveaux variés. 130 élèves ont répondu au questionnaire A et 130 au questionnaire B. Dans 3 classes, chacune d'un établissement différent, c'est le professeur qui a fait passer le test, sans notre présence ; dans les 7 autres classes de trois établissements différents, nous étions présent quand le professeur a fait passer le test. Cela nous a permis d'observer et de noter les questions des élèves sur les questionnaires. Nous préciserons les détails de notre observation lors de l'analyse de chaque question.

Dans tous les cas, le questionnaire a été passé après les premières séances sur les fonctions (voire dans certaines classes à la fin des chapitres sur les fonctions). L'enseignant avait pour consigne de ne pas intervenir pendant le test.

Nous précisons que nous avons comparé les réponses des élèves classe par classe mais nous n'avons pas trouvé de différences significatives entre les classes. Il ne nous a donc pas semblé utile ici de rendre compte de ces résultats dans le détail.

### Question 1A : la conversion d'un tableau de valeurs à un tableau de variations.

Le tableau ci-dessous montre la répartition des réponses des 130 élèves pour cette question qui n'a soulevé aucune remarque, dans les classes que nous avons observées.

| | Question 1Aa | | | | | Question 1Ab | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | valsupp | varloc | neg | 0 | 1 | presque | nonpert | unic | aff | croiss | non | oui | 0 |
| **Nombre d'élèves** | 58 | 30 | 23 | 13 | 6 | 4 | 7 | 24 | 35 | 6 | 24 | 5 | 2 | 23 |
| % | **45** | **23** | **18** | **10** | **5** | **3** | **5** | **18** | **27** | **5** | **18** | **4** | **2** | **18** |

**Tableau n°1: Répartition des réponses des 130 élèves pour la question 1A.**

Examinons maintenant dans le détail les résultats obtenus.

***Question 1Aa***

Nous pouvons voir que 45% des élèves donnent la réponse exacte. Par contre, un nombre important d'élèves donnent une réponse du type « valsupp » ou « varloc » : 41% au total (23% pour « valsupp » et 18% pour « varloc »). Ces élèves, comme nous l'avons dit dans l'analyse a priori, ont du mal à abandonner certaines informations (non pertinentes pour le tableau de variations), et ils ont également du mal à distinguer les natures et les fonctions respectives du tableau de valeurs et du tableau de variations. De plus, nous pensons que les élèves qui donnent la réponse codée « varloc », ont une conception non suffisamment globale de la fonction.

10% des élèves donnent la réponse codée « neg ». Ce pourcentage semble élevé pour une classe de seconde où l'on pourrait espérer que l'ordre sur les nombres négatifs est acquis. Ainsi, notre hypothèse selon laquelle certains élèves ont voulu, par effet de contrat, obtenir une réponse avec une fonction non monotone semble se vérifier.

***Question 1Ab***

Seuls 4 élèves (3%), répondent correctement à cette question ; ceci confirme nos résultats sur l'analyse des manuels (on insiste très peu sur l'idée qu'à un tableau de valeurs peut correspondre plusieurs tableaux de variations) et sur l'analyse des réponses des enseignants. Ces élèves qui avaient donné la bonne réponse à la question 1Aa, montrent qu'ils ont bien compris qu'un tableau de valeurs ne donne que des informations partielles sur une fonction.

7 élèves (5%) qui avaient aussi donné la bonne réponse à la question 1Aa, précisent que la fonction peut varier entre deux valeurs du tableau mais qu'il faut connaître d'autres points (codé « presque »). Ces élèves ont une conception correcte du tableau de valeurs, mais ils n'ont pas encore une maîtrise suffisante du tableau de variations pour répondre correctement ou bien ils ne s'autorisent pas à choisir une valeur non donnée dans le tableau de valeurs.

Ainsi, dans la pratique quotidienne de la classe, on utilise soit le registre algébrique soit le registre graphique pour construire des points d'une fonction. Dans ce sens, c'est une question inhabituelle pour ces élèves, puisqu'ils doivent « inventer » la valeur de la fonction en au moins un autre point sans le registre algébrique ou le registre graphique pour pouvoir donner un autre tableau de variations.

24 élèves (18%) donnent la réponse du type « nonpert » (leurs réponses à la question précédente sont variées : 1, valsupp, varloc). Ces élèves croient donner un autre tableau de variations en ne jouant que sur des valeurs non pertinentes (rajout ou suppression des valeurs –1, 0 ou 1, découpage de la flèche ou recollement des quatre flèches). Ainsi ils montrent qu'ils n'ont pas encore une maîtrise suffisante du tableau de variations.

13 élèves (16%), qui avaient tous répondu correctement à la première question donnent une réponse du type « aff » ou « croiss ». Ces élèves n'arrivent pas à imaginer un comportement « atypique » entre deux valeurs successives du tableau de valeurs. On peut dire qu'ils ont l'habitude de voir ces types de tableaux (avec toutes les valeurs entières et la proportionnalité) depuis la troisième et qu'ainsi cette habitude influence ces élèves, qui ne pensent qu'aux fonctions affines (ou plus généralement aux fonctions de référence).

Enfin 23 élèves (28%) donnent la réponse codé « unic » (leurs réponses à la question précédente sont variées : « 1 », « valsupp », « varloc », « neg »). Nous pensons que ces élèves peuvent avoir été influencés par l'insistance en début de seconde faite sur l'unicité de l'image pour une valeur de x donnée.

## Question 1B : La conversion d'un tableau de valeurs à une représentation graphique

Le tableau ci-dessous montre la répartition des réponses des 130 élèves pour cette question qui n'a également soulevé aucune remarque, dans les classes observées.

| | Question 1Ba | | | | | Question 1Bb | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | errgraph | im/ant | aff | 0 | 1 | presque | aff | croiss | unic | non | oui | 0 |
| **Nombre d'élèves** | 108 | 13 | 4 | 2 | 3 | 14 | 4 | 23 | 2 | 52 | 9 | 3 | 23 |
| **%** | **83** | **10** | **3** | **2** | **2** | **11** | **3** | **18** | **2** | **40** | **7** | **2** | **18** |

**Tableau n°2: Répartition des réponses des 130 élèves pour la question 1B.**

Examinons maintenant dans le détail les résultats obtenus.

### *Question 1Ba*

Nous voyons que pour cette conversion 83% des élèves répondent correctement (codé 1) et que tous donnent comme réponse la droite représentant la fonction f(x) = 2x-1, sans citer cette fonction ni essayer de la déterminer. Ce pourcentage de réussite important montre que cette tâche est plus simple que la conversion d'un tableau de valeurs à un tableau de variations comme à la question 1a du questionnaire A (cf. ci-dessus). En effet, comme nous l'avons dit dans l'analyse a priori, c'est un type de tâches très classique et les élèves ont l'habitude de la faire depuis la 3$^{ème}$ du collège pour l'étude de la fonction affine.

13% des élèves (errgraph et im/ant) montrent qu'ils ont des difficultés sur l'utilisation d'un repère ou dans la lecture des coordonnées dans le tableau de valeurs. Ainsi, ils ne tracent pas une droite. Il n'est pas certain que ces élèves commettent une erreur de conversion de registre, leur difficulté peut n'être liée qu'à une difficulté de traitement dans l'un des deux registres.

Seuls 2 élèves ne prennent en compte que deux couples de valeurs et tracent un segment à partir de ces deux points (aff). Ceci peut être accentué par le modèle de la fonction affine qui est suffisamment prégnant. Reste à savoir si ces élèves ont réellement vérifié que la fonction pouvait être affine ou si c'est le seul modèle ou la seule technique de tracé qui leur est disponible.

***Question 1Bb***

14 élèves seulement (11%) ont pu donner une autre représentation graphique. Remarquons que dans tous les cas, la représentation donnée est celle d'une fonction croissante : ils la tracent en faisant des virages autour des points donnés. Puisqu'ils n'ont étudié jusque-là, que les fonctions affine, carrée et inverse, il leur est certainement difficile de voir une fonction « atypique » qui changerait plusieurs fois de sens.

4 élèves (3%) qui avaient aussi donné la bonne réponse à la question 1Ba, précisent que la fonction peut varier entre deux valeurs du tableau mais qu'il faut connaître d'autres points (codé presque). Ces élèves ont une conception correcte du tableau de valeurs, mais ils n'ont pas encore une maîtrise suffisante de la représentation graphique pour répondre correctement ou, comme pour la question 1Ab, ils ne se donnent pas le droit d'«inventer » des variations.

25 élèves (19%) donnent la réponse du type « aff » (23 élèves) ou « croiss » (2 élèves). Tous ces élèves ont donné la bonne réponse à la première question. Ces élèves n'arrivent pas à imaginer un comportement « atypique » entre deux valeurs successives du tableau de valeurs. On peut dire qu'ils ont l'habitude de voir ces types de tableaux (avec toutes les valeurs entières et la proportionnalité) et qu'ils se bloquent sur la fonction affine.

Enfin 52 élèves (40%) donnent la réponse codée « unic » (leurs réponses à la question précédente sont variées : « 1 », « errgraph », « im/ant », « aff »). Ces élèves peuvent avoir été influencés par l'insistance, en début de seconde, faite sur l'unicité de l'image pour une valeur de x donnée. Une autre difficulté qu'on peut supposer pour ces élèves, viendrait de ce que la forme de la question posée est hors contrat dans l'étude de la notion de fonction, puisqu'ils ont l'habitude de tracer une seule représentation graphique à partir d'un tableau de valeurs dans le contrat classique.

Au total 86 élèves (66%) n'envisagent pas qu'il puisse y avoir une autre représentation graphique correspondante au tableau de valeurs (« aff », « croiss », « unic » et « non »). Ce pourcentage élevé montre que même si la conversion d'un tableau de valeurs à une courbe est globalement acquise, les élèves ont en majorité une compétence technique qui ne semble pas être soutenue par une conceptualisation suffisante du lien entre les deux registres.

## Questions 2A et 2B : Le traitement d'un tableau de valeurs

Le tableau ci-dessous montre la répartition des réponses des 260 élèves pour ces questions (130 élèves pour 2A et 130 élèves pour 2B) qui n'ont soulevé aucune remarque.

| | 1/hors tableau | 2/dans tableau | 3/diff im-ant | 0 |
|---|---|---|---|---|
| Nombre d'élèves: question 2A | 18 | 68 | 39 | 5 |
| *%* | ***14*** | ***52*** | ***30*** | ***4*** |
| Nombre d'élèves: question 2B | 6 | 78 | 35 | 11 |
| *%* | ***5*** | ***60*** | ***27*** | ***8*** |

**Tableau n°3: Répartition des réponses des 260 élèves pour les questions 2A et 2B**

**Légende :**
1/hors tableau : l'élève envisage qu'il peut y avoir d'autres valeurs hors du tableau.
2/dans tableau : l'élève ne sort pas des valeurs du tableau mais a une vision correcte de la notion d'extremum dans cette limite.
3/diff im-ant : l'élève reste aussi dans les valeurs du tableau mais montre en plus des difficultés, liées aux notions d'image et d'antécédent.

24 élèves (9%) seulement au total envisagent qu'il peut y avoir d'autres valeurs hors du tableau de valeurs ou ils disent qu'on ne peut pas connaître les extrema d'une fonction à partir d'un tableau de valeurs (codé 1/hors tableau).

Nous constatons, par contre, qu'il y a un écart important entre les réponses des deux questionnaire : 14% des élèves ont répondu dans cette catégorie pour la question 2A, contre seulement 5%, pour la question 2B. Ceci laisse penser que la forme du tableau de valeurs donnée est une variable importante pour certains élèves (dans le premier cas on a donné certains valeurs entières de l'intervalle de définition, par contre, dans le deuxième cas on a donné toutes les valeurs entières).

Comme nous l'avons prévu dans l'analyse a priori, la plupart des élèves répondent en restant dans les limites des valeurs du tableau (codé 2/dans tableau) : 56% au total (68 élèves (52%) pour la question 2A et 78 élèves (60%) pour 2B). Leurs réponses aux questions 1Ab et 1Bb sont variées et même 8 d'entre eux arrivent à donner une réponse correcte à ces questions (un autre tableau de variations ou une autre représentation graphique).

Enfin nous constatons qu'un nombre important d'élèves donnent une réponse du type « 3/diff im-ant » : 28% au total (74 élèves). Comme nous l'avons dit dans l'analyse a priori, on peut considérer ces questions comme peu habituelles dans le contrat classique de la classe de 2nde, donc ces élèves peuvent avoir été perturbés par la nouveauté de cette tâche.

Nous examinons maintenant en détail les réponses du type « 1/hors tableau » et du type « 2/dans tableau ».

- Ceux qui envisagent qu'il peut y avoir d'autres valeurs hors du tableau (codé 1/hors tableau) :

| | **1/0-justif** | **1/0-alg** | **1/0-var** | **1/graph** | **1/tvr** | **1/0-val** | **1/val** | **1/2** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2A (18 élèves) | - | - | - | 1 | - | 4 | 5 | 8 |
| 2B (6 élèves) | - | - | - | - | - | - | 3 | 3 |

**Tableau n°4: Répartition des réponses « 1/hors tableau »**

Nous pouvons dire, à partir de ce tableau, que dans cette catégorie de réponse, même si les élèves ont compris qu'un tableau de valeurs ne donne que des informations partielles sur la fonction, ils ont plutôt tendance à donner une réponse numérique (codé « 1/val » et « 1/2 » : 19 élèves au total). Ceci montre certainement un effet de contrat qui consiste à dire qu'en mathématiques la réponse « on ne peut pas savoir » ne peut pas être considérée comme une réponse valide.

Nous constatons aussi qu'aucun élève n'a essayé d'utiliser le tableau de variations comme contre exemple, et que le registre graphique n'est, quant à lui, utilisé qu'une seule fois.

- Ceux qui restent dans les limites des valeurs du tableau (codé 2/dans tableau) :

| | **2** | **2/val** | **2/graph** | **2/ tvr** | **2/var** |
|---|---|---|---|---|---|
| 2A (68 élèves) | 10 | 31 | 18 | - | 9 |
| ***%*** | ***8*** | ***24*** | ***14*** | ***-*** | ***7*** |
| 2B (78 élèves) | 21 | 36 | 19 | - | 2 |
| ***%*** | ***16*** | ***28*** | ***15*** | ***-*** | ***2*** |

**Tableau n°5: Répartition des réponses « 2/dans tableau »**

L'argument le plus utilisé par les élèves, dans les deux cas, est celui de type « 2/val » (au total 67 élèves – 26%). Pour cet argument, nous ne pouvons pas déterminer les raisonnements de ces élèves puisqu'il n'y a pas d'autre trace dans leurs copies : ils peuvent très bien ne comparer que les valeurs de la fonction dans le tableau de valeurs (dans ce cas-là, les élèves n'ont pas compris la question en tant que la recherche des extrema d'une fonction, mais plutôt la recherche de la plus grande/petite valeur du tableau) ou ils peuvent passer mentalement d’abord à un autre registre puis donner cette réponse.

Par contre nous avons constaté que 67 élèves au total (26%) donnent une réponse dans cette catégorie en utilisant le registre graphique (soit ils tracent une courbe soit ils utilisent des arguments du registre graphique).

Nous pouvons en outre souligner, comme dans la réponse du type « 1/hors tableau », l’absence de justification se basant l’utilisation du tableau de variations, même si les élèves ont une connaissance suffisante sur la construction d’un tableau de variations (cf. question 1Aa). Ceci nous montre qu’ils n’arrivent pas à adapter ces connaissances au contexte particulier. Autrement dit, ils ont des *connaissances disponibles* mais non *mobilisables* sur le tableau de variations (Robert, 1998).

### Questions 3A et 3B : le traitement d’un tableau de valeurs dans un contexte de la bourse

Pour ces questions, pendant l’expérimentation, un élève nous a demandé « ça veut dire quoi les cours d’une action ? ». Par contre, aucun élève n’a posé de question sur la continuité des valeurs des actions dans la période !

Nous analyserons ensemble les réponses des élèves pour ces deux questions, puisqu’il y a pas de différence significatives entre les deux questions. Voici la répartition des réponses des 260 élèves :

| | Croisement | Contexte | Discret | Autres | 0 |
|---|---|---|---|---|---|
| Nombre d’élèves (total : 260) | 146 | 24 | 25 | 31 | 34 |
| **%** | **56** | **9** | **10** | **12** | **13** |

**Tableau n°6: Répartition des réponses des 260 élèves pour les questions 3A et 3B**

**Légende :**
Croisement : les réponses qui consistent à utiliser le croisement des valeurs (2/0, 2/sens, 2/graph, 2+)
Contexte : les réponses qui consistent à rendre compte du contexte de la bourse (+/context, 0/context)
Discret : les réponses qui consistent à voir seulement les valeurs du tableau (non chiff, proche)
Autres : les autres types de réponses (+sens, aff, non, oui)

Examinons maintenant en détail ce tableau :

Comme nous l’avons prévu dans l’analyse a priori, la plupart des élèves donnent une réponse du type « croisement » : 146 élèves (56%). Nous allons commenter ci-dessous en détail les arguments utilisés par les élèves dans cette catégorie.

Nous avons vu à travers l’analyse des manuels que le tableau de valeurs est utilisé essentiellement en lien avec le registre graphique, que ce soit dans des contextes extra ou intra-mathématiques. Aussi, nous pensons que les élèves quand ils voient un tableau de valeurs, ont plutôt tendance à passer au registre graphique. D'autre part, le contexte de la bourse est présenté toujours par les media avec une courbe (en général avec des segments de droites). Ceci renforce encore l'idée de passer au graphique.

Nous constatons que seulement 9% des élèves utilisent des arguments qui sont liés au contexte de la bourse : 18 élèves pour « +/context » et 6 élèves pour « 0/context ». De plus, 10% des élèves ne voient que des valeurs du tableau (codé « discret »), ainsi que 12% des élèves. Donc, le contexte dans lequel le tableau de valeurs est donné n'a pas beaucoup d'influence sur la résolution.

- Ceux qui donnent la réponse du type « Croisement » :

| | 2/0justif | 2/graph | 2/sens | 2+ |
|---|---|---|---|---|
| Nombre d'élèves | 33 | 54 | 48 | 11 |
| **%** | **13** | **21** | **18** | **4** |

13% des élèves donnent une réponse dans cette catégorie sans préciser une justification. Nous ne pouvons pas faire une hypothèse sur le raisonnement de ces élèves. Ils peuvent utiliser le registre graphique mentalement ou bien le changement du sens des actions. Pourtant 21% des élèves utilisent le registre graphique et 18% des élèvent donnent une réponse du type « 2/sens ».

Enfin seulement 4% des élèves (11 élèves sur 260) montrent qu'ils ont une connaissance fine de la partialité des informations données par un tableau de valeurs (codé 2+).

## Question 4A : la conversion d'un tableau de variations à une représentation graphique

Le tableau ci-dessous montre la répartition des réponses des 130 élèves pour cette question qui n'a également soulevé aucune remarque.

| | Question 4Aa | | | Question 4Ab | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | errgraph | 0 | 1 | presque | errsens | unictvr | unic | non | oui | 0 |
| Nombre d'élèves | 99 | 20 | 11 | 18 | 13 | 5 | 6 | 30 | 24 | 7 | 27 |
| **%** | **76** | **15** | **8** | **14** | **10** | **4** | **5** | **23** | **18** | **5** | **21** |

**Tableau n°7: Répartition des réponses des 130 élèves pour la question 4A**

***Question 4Aa***

76% des élèves répondent correctement pour cette conversion (codé 1). Ceci nous montre que cette tâche est également plus simple que la conversion d'un tableau de valeurs en un tableau de variations (question 1Aa). Ceci confirme notre analyse du nouveau programme de $2^{nde}$ où cette tâche est explicitement demandée et bien étudiée par les manuels analysés. Notons également que les enseignants interrogés sur cette question déclarent que cette question fait partie des types de tâches importantes pour la notion étudiée. Ces résultats confirment que cette tâche est bien présente dans la pratique des classes expérimentées.

15% des élèves montrent qu'ils ont des difficultés dans la lecture des coordonnées dans le tableau de variations. Il n'est pas certain que ces élèves commettent une erreur de conversion de registre, leurs difficultés peuvent n'être liées qu'à une difficulté de traitement dans l'un des deux registres.

Au total 119 élèves (82%) montrent qu'ils n'ont pas de difficulté pour cette conversion (« 1 » et « errgraph »)

***Question 4Ab***

18 élèves seulement (14%) ont pu donner une autre représentation graphique ; ceci confirme nos résultats sur l'analyse des réponses des enseignants où ils précisent que les élèves n'envisageront que la courbe d'une fonction affine par morceaux. La plupart de ces élèves arrivaient également à donner un autre tableau de variations pour la question 1Ab.

Rappelons que dans le questionnaire B 14 élèves (11%) arrivent à tracer une autre représentation graphique à partir d'un tableau de valeurs (question 1Bb). Ceci prouve que la difficulté est ici essentiellement liée au registre de sortie.

13 élèves (10%) qui avaient donné la bonne réponse à la question 4Aa, précisent qu'on peut en donner une autre si elle passe par tous les points donnés et respecte le tableau de variations mais n'arrivent pas à tracer une autre représentation graphique (codé presque). Ces réponses sont difficiles à interpréter. Est-ce que ces élèves considèrent que ce sont finalement les mêmes réponses, ou n'arrivent-ils tout simplement pas à finaliser un nouveau tracé ?

5 élèves (4%) donnent la réponse du type « errsens ». Ils utilisent en effet le tableau de variations comme un tableau de valeurs donc ils n'arrivent pas encore à distinguer la nature et la fonction de ces deux tableaux.

Remarquons ici que 30 élèves (23%) donnent une réponse du type « unic » (leurs réponses à la question précédente sont plutôt correctes). On constate ainsi une diminution de pourcentage par rapport à la question 1Bb (23% contre 40%). Cet écart est certainement lié au fait qu'une réponse possible à la question 1Bb est une droite ce qui renforce très certainement l'idée de l'unicité.

Au total 60 élèves (46%) n'envisagent pas qu'il puisse y avoir une autre représentation graphique correspondante au tableau de variations (« unictvr », « unic » et « non »). (Contre 66% pour la question 1Bb : conversion d'un tableau de valeurs à une autre représentation graphique). Ce pourcentage élevé montre que même si la conversion d'un tableau de variations à une courbe est globalement acquise, les élèves ont en majorité une compétence technique qui ne semble pas être soutenue par une conceptualisation suffisante du lien entre les deux registres.

## Question 4B : la conversion d'un tableau de variations à un tableau de valeurs

| | Question 4Ba | | | | Question 4Bb | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1/complet | 1/moitié | 0 | 1 | 1/sscinq | presque | valsuprim | moitié | unic | non | oui | 0 |
| Nombre d'élèves | 83 | 18 | 2 | 27 | 8 | 2 | 14 | 2 | 2 | 35 | 16 | 9 | 42 |
| **%** | **64** | **14** | **2** | **21** | **6** | **2** | **11** | **2** | **2** | **27** | **12** | **7** | **32** |

**Tableau n°8: Répartition des réponses des 130 élèves pour la question 4B**

Examinons maintenant dans le détail les résultats obtenus.

***Question 4Ba***

103 élèves (79%) donnent la réponse exacte (« 1 », « 1/complet » et « 1/moitié) dont 18 élèves essaient de donner un tableau de valeurs complet avec toutes les valeurs entières. La réponse de ces élèves montre que dans leur classe le contrat est très fort sur le fait qu'un tableau de valeurs doit comporter toutes les valeurs entières.

27 élèves (21%) ne répondent pas à cette question. Ce pourcentage semble élevé puisqu'on devrait immédiatement donner le tableau de valeurs attendu avec les cinq valeurs du tableau de variations. Nous pensons que cette conversion est hors contrat pour ces élèves. Puisque nous avons constaté, d'une part, dans les manuels analysés, ce type de conversion entre deux tableaux est très peu étudié et d'autre part, que la plupart des enseignants interrogés envisagent en général les tâches de conversion entre tableaux et graphique mais pas entre deux tableaux. Ainsi, ce type de conversion n'a pas sa place dans la pratique de la classe et plusieurs élèves ne répondent pas à cette question. (Par contre seulement 6 élèves ne répondent pas à la question 1Aa qui est similaire, une raison est liée à l'ordre des questions, on se force plus à répondre aux questions du début qu'à la dernière du questionnaire).

***Question 4Bb***

Seuls 8 élèves (6%) répondent correctement à cette question. Nous constatons ici une augmentation par rapport à la question 1Ab où on demandait l'inverse de cette conversion (4 élèves). Est-ce que la tâche est plus simple ou que les élèves sont plus habitués à manipuler des tableaux de variations que des tableaux de valeurs ?

Au total seuls 14 élèves (11%) essaient de donner un autre tableau de valeurs (« 1 », « 1/sscinq » « valsupprim » et moitié »), alors que 51 élèves (39%) n'envisagent pas qu'il puisse y avoir un autre tableau de valeurs (« unic » et « non »). En plus, 42 élèves (32%) ne répondent pas à cette question.

### Quelques profiles types d'élèves et interview

Au-delà de l'analyse globale que nous venons de développer, il nous a paru intéressant de dégager quelques profils types d'élèves. Au vu des résultats, nous avons ainsi faire ressortir quatre profils. D'autre part, dans une des classes où nous avons fait passer notre questionnaire, nous avons eu l'occasion d'interviewer deux élèves (ayant répondu l'un au questionnaire A l'autre au B, tout de suite après le passage du questionnaire). Il s'agit bien sûr d'un seul binôme et donc d'un cas particulier, mais la teneur de cette entrevue nous a semblé suffisant riche pour que nous en faisions état dans notre travail. Nous présentons en annexe (annexe B4) ces deux analyses

## III.1 Expérimentation dans les classes de Terminale

Afin de compléter notre analyse, il nous a semblé intéressant d'expérimenter les questionnaires précédents dans quelques classes de Terminale pour voir si certaines erreurs persistent ou s'il y a une évolution sur la façon dont les élèves utilisent le tableau de valeurs et le tableau de variations.

Le test a été passé, pendant une séance (environ 40 minutes), dans 4 classes différents de terminale, 2 classes de S et 2 classes de ES, réparties dans 2 établissements et de niveaux variés. 57 élèves ont répondu au questionnaire A et 54 au questionnaire B. Dans toutes les classes, nous étions présent quand le professeur a fait passer le test. Notons ici qu'aucune remarque n'a été faite par les élèves sur ces questionnaires pendant l'expérimentation.

### Question 1A : la conversion d'un tableau de valeurs à un tableau de variations

Voici la répartition des réponses des 57 élèves pour cette question :

| | Question 1Aa | | | | | Question 1Ab | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | valsupp | varloc | neg | 0 | 1 | presque | nonpert | unic | aff | croiss | non | oui | 0 |
| T-S (28 élèves) | 24 | - | 1 | 3 | - | 9 | 2 | 2 | 6 | - | 3 | 3 | - | 3 |
| **%** | **86** | | | | | **32** | | | **21** | | | | | |
| T-ES (29 élèves) | 16 | 8 | 1 | 4 | - | 1 | 1 | 3 | 6 | - | 14 | 2 | - | 2 |
| **%** | **55** | **28** | | | | **3** | | | **21** | | **48** | | | |

**Tableau n°9: Répartition des réponses des 57 élèves pour la question 1A**

Nous voyons ici qu'il y a une augmentation significative de la réponse exacte par rapport à la classe de 2$^{nde}$ : 86% pour la section S et 55% pour la section ES contre 45% pour la 2$^{nde}$.

Notons également qu'aucun élève de S ne donne une réponse du type « valsupp », alors que 8 élèves (28%) de ES donnent ce type de réponse (contre 23% pour la $2^{nde}$). Ceci montre que pour certains élèves ce problème persiste depuis la classe de $2^{nde}$ et qu'ils ont du mal à abandonner certaines informations non pertinentes pour un tableau de variations.

Pour la question 1b, même s'il y a une grande augmentation des réponses exactes pour la section S par rapport à la $2^{nde}$ (32% contre 3% pour la $2^{nde}$), on pourrait espérer encore une pourcentage plus élevé pour des Terminales S. Remarquons que pour la section ES, seul 1 élève peut arriver à donner un autre tableau de variations (même pourcentage qu'en $2^{nde}$). Une autre remarque frappante est que le modèle tout croissant et le fait d'avoir donné toutes les valeurs de la fonction pour les valeurs entières de x continuent à empêcher (surtout les élèves de ES) d'imaginer un comportement ou non croissant entre deux valeurs successives (la réponse du type « croiss » : 48% en ES).

Notons que quelques élèves donnent un tableau de variations correspondant à une fonction non définie sur une valeur dans l'intervalle [-2 ; 2], qui était imposé comme intervalle de définition.

### Question 1B : La conversion d'un tableau de valeurs à une représentation graphique

| | Question 1Ba | | | | | Question 1Bb | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | errgraph | im/ant | aff | 0 | 1 | presque | aff | croiss | unic | non | oui | 0 |
| T-S (26 élèves) | 26 | - | - | - | - | 12 | - | 6 | - | 7 | - | - | 1 |
| **%** | **100** | | | | | **46** | | **23** | | **27** | | | |
| T-ES (28 élèves) | 28 | - | - | - | - | 3 | - | 14 | - | 8 | 1 | - | 2 |
| **%** | **100** | | | | | **11** | | **50** | | **29** | | | |

**Tableau n°10: Répartition des réponses des 54 élèves pour la question 1B**

Tous les élèves répondent correctement à la question 1Ba sans difficulté et la plupart d'entre eux tracent une droite.

Pour la question 1Bb, comme pour la question 1Ab, les élèves ont beaucoup de difficultés à répondre correctement : Seule la section de S se trouve au-dessus de la $2^{nde}$ (46% contre 11% en $2^{nde}$). Ceux qui tracent une autre représentation graphique tracent en général la courbe d'une fonction croissante, même si, arrivés en Terminales, on ne puisse douter qu'ils aient déjà rencontré des fonctions qui peuvent changer de sens entre deux valeurs entières successives.

Remarquons que la moitié des élèves de ES donnent une réponse du type « aff » (contre 18% en $2^{nde}$). La plupart d'entre eux essaient même de trouver l'expression algébrique de la fonction (*f(x)= 2x – 1*). Ceci confirme finalement que même si le programme de 2nde demande de sortir la fonction du tout algébrique et propose d'utiliser d'autres modes de représentation, dans les classes ultérieures, la fonction est présentée plutôt algébriquement.

En outre, il y a une diminution du taux de réponses du type « unic » (28% en moyenne contre 40% en 2nde). On constate ainsi une diminution de l'influence de l'insistance en début de seconde faite sur l'unicité de l'image pour une valeur de x donnée.

## Question 2A et 2B : Le traitement d'un tableau de valeurs

| | Question 2A | | | | Question 2B | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1/hors tableau | 2/dans tableau | 3/bornes | 0 | 1/hors tableau | 2/dans tableau | 3/bornes | 0 |
| T-S (28A – 26B) | 12 | 15 | 1 | - | 7 | 17 | - | 2 |
| ***%*** | ***43*** | ***54*** | | | ***27*** | ***65*** | | |
| T-ES (29A – 28B) | 4 | 19 | 6 | - | - | 26 | 1 | 1 |
| ***%*** | ***14*** | ***66*** | ***20*** | | | ***93*** | | |

**Tableau n°11: Répartition des réponses des 111 élèves pour les questions 2A et 2B**

***Question 2A***

12 élèves (43%) de S envisagent qu'il peut y avoir d'autres valeurs hors du tableau de valeurs ou ils disent qu'on ne peut pas connaître les extrema d'une fonction à partir d'un tableau de valeurs contre 4 élèves (14%) de ES pour la question 2A. On constate ainsi une augmentation de réussite par rapport au classe de 2nde pour les classes de S, alors qu'il est stable pour les classes de ES (14% pour la 2nde).

Dans les deux sections, la plupart des élèves répondent en restant dans les limites des valeurs du tableau (codé 2/dans tableau) : 54% pour la section S et 66% pour la section ES (contre 52% pour la 2nde).

En outre, 6 élèves (20%) de ES donnent une réponse du type « 3/bornes ». Ces élèves, en restant dans les limites des valeurs du tableau, donnent comme plus grande et plus petite valeurs, les valeurs prises par la fonction aux bornes de l'intervalle. Ils donnent ainsi la première et la dernière valeurs de la deuxième ligne du tableau. Certains d'entre eux donnent également les bornes elles-mêmes comme réponse. Rappelons qu'en seconde le pourcentage était de 30%. Il y a donc amélioration, mais on ne peut pas dire que le problème ait été résolu.

***Question 2B***

On constate une diminution de la réponse exacte par rapport à la question 2A dans les deux sections (27% pour S contre 5% pour la 2nde). En plus, dans le section de ES, aucun élève n'a donné la réponse exacte, ils donnent pratiquement tous une réponse du type « 2/dans tableau » (93% contre 60% pour la 2nde). Ceci nous montre que les élèves continuent à croire qu'un tableau de valeurs complet comporte les valeurs remarquables d'une fonction et la forme du tableau de valeurs (certains valeurs ou toutes les valeurs entières) continue à influencer la solution.

Notons que dans les deux sections, la plupart de ceux qui donnent une réponse correcte du type « 1/hors tableau », utilise le registre graphique ou une argument sur la connaissance du tableau de valeurs (entre deux valeurs du tableau, la fonction peut changer du sens,…) ; on peut voir que certains d'entre eux utilisent aussi un tableau de variations comme un contre-exemple, ce qui n'est pas le cas en 2nde. On voit donc là un effet de nouveaux apprentissages pertinents.

## Question 3A et 3B : Le traitement d'un tableau de valeurs dans un contexte de la bourse

| | Croisement | Contexte | Discret | Autre | 0 |
|---|---|---|---|---|---|
| T-S (54 élèves) | 33 | 17 | - | 3 | - |
| ***%*** | ***61*** | ***31*** | | | |
| T-ES (57 élèves) | 35 | 4 | 8 | 6 | 4 |
| **%** | **62** | **7** | **14** | **11** | **7** |

**Tableau n°12: Répartition des réponses des 111 élèves pour les questions 3A et 3B**

Comme les élèves de 2nde, la plupart des élèves donnent une réponse du type « croisement » : 33 élèves (61%) pour la section S et 35 élèves (62%) pour la section ES contre 56% pour la 2nde. Ajoutons également que la plupart d'entre eux précisent, après avoir utilisé le croisement des valeurs, que les valeurs de deux actions peuvent augmenter ou diminuer tout le temps et qu'elles peuvent se croiser à n'importe quel autre moment. En outre, 17 élèves de S (31%) et 4 élèves de ES (7%) donnent une réponse du type « contexte » : Ils rendent compte seulement du contexte de la bourse sans utiliser le croisement des valeurs.

Nous constatons donc que l'influence du contexte dans lequel le tableau de valeurs est donné est plus forte dans les classes de Terminale que dans les classes de 2nde et visiblement plus en S qu'en ES, ce qui est surprenant.

Remarquons également, que le pourcentage d'élèves de ES répondant faux ou pas du tout est relativement élevé (32%). Ils s'appuient soit seulement sur les valeurs du tableau en les comparant, soit ils se contentent de valeurs très rapprochées l'une de l'autre ou bien ils utilisent des arguments de proportionnalité entre les valeurs du tableau. En S par contre, il n'y a pas de non réponses ou de réponses vraiment erronées, même si les justifications ne sont pas toujours suffisantes.

## Question 4A : La conversion d’un tableau de variations en une représentation graphique

| | Question 4Aa | | | Question 4Ab | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | errgraph | 0 | 1 | presque | errsens | unictvr | unic | non | oui | 0 |
| T-S (28 élèves) | 27 | 1 | - | 8 | - | 4 | 6 | 4 | 3 | 1 | 2 |
| **%** | **96** | | | **29** | | | **21** | | | | |
| T-ES (29 élèves) | 28 | 1 | - | 1 | 1 | - | 1 | 17 | 4 | 2 | 3 |
| **%** | **96** | | | | | | | **59** | | | |

**Tableau n°13: Répartition des réponses des 57 élèves pour la question 4A**

Pratiquement tous les élèves répondent correctement à la question 4Aa, alors que seul 8 élèves de S (29%) et 1 élève de ES peuvent arriver à tracer une autre représentation graphique pour la question 4Ab (contre 14% pour la $2^{nde}$).

Rappelons que dans le questionnaire B, 12 élèves de S (46%) et 3 élèves de ES arrivent à tracer une autre représentation graphique à partir d’un tableau de valeurs (question 1Bb). On constate ainsi un peu plus de réussite avec le tableau de valeurs qu’avec le tableau de variations comme registre d’entrée pour arriver à tracer une deuxième représentation graphique.

4 élèves de S tracent une autre représentation graphique mais sans respecter le sens de variation indiqué par le tableau de variations (« errsens »). Ils utilisent en effet le tableau de variations comme un tableau de valeurs. En outre, 6 élèves (21%) de même section n’arrivent pas tracer une autre représentation graphique en disant qu’une fonction a un seul tableau de variations. Par contre, la plupart des élèves de ES donnent une réponse du type « unic » : 17 élèves (59%).

En outre, nous avons remarqué ici que certains élèves, qui disent oui et qui n’arrivent pas à tracer une autre courbe, considèrent que ce sont finalement les mêmes réponses. Voici les explications de deux élèves :

> « On pourrait en tracer des plus précis si l’on avait plus de valeurs mais quoi qu’il en soit elle sera pareille à celle que l’on a tracée » (E17, section S)
>
> « On a ici toutes les informations nécessaires pour tracer correctement la courbe h(x) mais il nous manque peut être quelques points pour avoir une plus grande précision au niveau du tracé. Donc non, il n’y a pas d’autre courbe possible si ce n’est une autre courbe différente sur quelques points, mais l’allure générale reste la même » (E16, section S)

Ces résultats nous amènent à penser que l'évolution des réponses sur ce type de questions (tracer plusieurs courbes à partir d'un tableau) n'est pas vraiment réglée au lycée. Ceci nous interroge sur la construction des connaissances des élèves sur la notion générale de fonction.

### Question 4B : la conversion d'un tableau de variations à un tableau de valeurs

| | Question 4Ba | | | | Question 4Bb | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1/complet | 1/moitié | 0 | 1 | 1/sscinq | presque | valsuprim | moitié | unic | non | oui | 0 |
| T-S (26 élèves) | 14 | 10 | - | 2 | 8 | 3 | 2 | 3 | - | 4 | 1 | - | 5 |
| **%** | **54** | **38** | | | **29** | | | | | | | | |
| T-ES (28 élèves) | 24 | 3 | - | 1 | 3 | - | 2 | - | - | 13 | 5 | 2 | 3 |
| **%** | **86** | **11** | | | **11** | | | | | **46** | | | |

**Tableau n°14: Répartition des réponses des 54 élèves pour la question 4B**

Pratiquement tous les élèves donnent pratiquement la réponse exacte (« 1 » et « 1/complet ») à la question 4Ba dont 10 élèves de S (38%) et 3 élèves de ES (11%) essaient de donner un tableau de valeurs complet avec toutes les valeurs entières. La réponses de ces élèves montre que le contrat sur la nature des tableaux de valeurs est encore le même en Terminale, sur le fait qu'un tableau de valeurs doit comporter toutes les valeurs entières.

Seul 8 élèves de S (29%) et 3 élèves de ES (11%) arrivent à donner un autre tableau de valeurs pour la question 4Bb (contre 6% des élèves de 2$^{nde}$). Il y a donc une légère augmentation de réussite par rapport à la 2$^{nde}$, mais ce problème est loin d'être résolu.

Notons enfin que la réussite est à peu près stable entre cette question et la question 1Ab où on demandait l'inverse de cette conversion pour les élèves de S, alors qu'il y a une augmentation pour les élèves de ES (11% contre 3%). Dans la question 1Ab, la plupart des élèves bloquent sur le fait que la fonction est toujours croissante alors que dans cette question ils affirment qu'une fonction a seul un tableau de variations.

# CONCLUSION

Nous avons essayé de faire un état des lieux de l'enseignement actuel de la notion de fonction en classe de seconde en dégageant des éléments des rapports institutionnel et personnels à l'objet fonction.

Nos analyses du rapport institutionnel nous ont montré que les différents registres devraient théoriquement être présents dans l'enseignement de la notion de fonction, mais qu'en pratique seuls quelques liens sont habituellement privilégiés et que, plus particulièrement, il n'y a pas de travail propre sur les connaissances relevant du registre tableaux dans les classes, conformément à notre analyse des réponses des enseignants (chapitre B3). Nous avons ainsi interrogé les élèves pour voir s'ils construisent eux-mêmes des connaissances en actes sur ces objets et dans quelle mesure cela influe et participe à la conceptualisation de la notion de fonction.

Avant de passer à la conclusion globale du chapitre B, nous donnons ci-dessous une synthèse des principaux résultats obtenus au questionnaire pour les élèves.

Nous avons d'abord examiné le cas de la conversion à partir du registre tableau de valeurs vers le registre graphique ou vers le registre tableau de variations (question 1). Nous avons constaté que les élèves arrivent facilement à tracer une courbe alors qu'un nombre important ont des difficultés pour donner un tableau de variations. Il apparaît donc que le registre de sortie dans la conversion joue un rôle important et que dans ce sens le tableau de variations est nettement plus compliqué que la courbe. Ceci peut s'expliquer par le fait que, comme nous l'avons montré dans l'analyse des manuels et l'analyse des réponses des enseignants, la conversion entre deux tableaux n'est pas mise en avant dans les pratiques et que c'est donc une tâche inhabituelle pour les élèves. Mais il semble que cette difficulté soit aussi liée au fait qu'aucun des deux registres en cause ne détermine entièrement la fonction en jeu. Ainsi, pour réaliser cette conversion, l'élève doit-il, au moins implicitement, sélectionner les informations pertinentes pour l'un et l'autre registres et réaliser la part d'arbitraire qu'il reste dans chacun des deux.

Dans les deux cas, la plupart des élèves n'arrivent pas à donner une autre courbe ou un autre tableau de variations correspondant à un même tableau de valeurs. Il semble que, d'une part l'enseignement ne laisse que peu, voire pas, de place à un questionnement explicite sur la non unicité de la représentation par et à partir d'un tableau de valeurs et que d'autre part, de façon générale, les élèves aient beaucoup de mal à donner deux réponses à une même question ou à admettre l'arbitraire d'une réponse (ce que confirme les difficultés prévues par les enseignants dans notre questionnaire).

Ceci nous montre également que la plupart des élèves font automatiquement certaines conversions (par exemple d'un tableau de valeurs à une représentation graphique), mais se trouvent déstabilisés par des questions inhabituelles sur ces conversions. Comme nous l'avons constaté dans l'analyse des manuels et du questionnaire aux enseignants, le tableau de valeurs apparaît plutôt comme un outil pour aider à tracer la représentation graphique d'une fonction. Dans ce contexte, la tendance naturelle (entretenue par la plupart des tâches proposées à l'élève) est de compléter entre les valeurs données par le comportement le plus lisse. Ces tâches répétitives, qui de plus portent sur des fonctions peut variées, semblent renforcer chez l'élève, l'idée qu'une seule courbe peut correspondre à un tableau de valeurs. Une conséquence est que l'élève est enfermé dans une technique algorithmique, qui se substitue à un questionnement plus conceptuel sur ces objets.

Nous avons également testé la capacité des élèves à utiliser le registre tableau de valeurs pour obtenir des informations sur la fonction (questions 2 et 3). Dans ce contexte, il apparaît clairement que de nombreux élèves font comme si toutes les informations pertinentes étaient contenues dans le tableau. Comme précédemment, rares sont ceux qui peuvent envisager plusieurs cas de figures correspondant à un même tableau. Par ailleurs, nous avons pu constater de façon claire que la forme du tableau de valeurs influence très nettement les réponses des élèves, conformément à notre analyse a priori. Il est évident qu'un tableau comportant toutes les valeurs entières de la variable sur un intervalle donné renforce l'idée d'unicité de la représentation. En revanche, nous n'avons pas observé de différence significative selon que la tâche est donnée en référence à des contextes intra ou extra mathématiques.

Concernant les conversions à partir d'un tableau de variations (question 4), on trouve des résultats similaire au cas du tableau de valeurs : les élèves réussissent plutôt mieux à tracer une courbe qu'à donner un tableau de valeurs et la plupart n'arrivent pas à tracer une autre courbe ou un autre tableau de valeurs à partir du même tableau de variations. Les mêmes difficultés que pour le tableau de valeurs semblent être en cause ici. De plus, se rajoutent visiblement, au moins en début d'apprentissage, des difficultés liées au sens du codage employé. Nous pensons ainsi la complexité du tableau de variations est sous-estimée dans l'enseignement.

L'expérimentation que nous avons faite dans les classes de Terminale montre que, même s'il y a une légère amélioration par rapport aux classes de seconde dans les classes de Terminale S, celle-ci est très peu visible dans les classes de ES. Il semble donc que la plupart des élèves gardent leurs connaissances privées sur ces objets depuis la classe de $2^{nde}$ et que les erreurs persistent encore. En outre, il apparaît que l'illusion d'unicité et de d'exhaustivité de la représentation quand le tableau de valeurs est « complet » est renforcée. Il semble donc que la représentation par un tableau de valeurs soit de plus en plus normative au fur et mesure qu'on avance dans les classes de Lycée. De plus, cet effet de contrat est certainement renforcé par l'utilisation des calculatrices. De même, la référence au registre algébrique dans une tâche où celui n'est pas a priori pertinent est plus forte chez les élèves de Terminale. Ceci s'explique naturellement par l'accroissement du travail algébrique fait dans les classes de Première et de Terminale. Par contre, on note une plus grande aisance dans l'utilisation des tableaux de variations, outils fortement utilisés après la seconde.

# Conclusion de la partie B

## Bilan des points phares des nouveaux programmes et des difficultés à les mettre en œuvre

En conclusion de cette partie B, visant à déterminer les caractéristiques essentielles des rapports institutionnel et personnels aux tableaux de valeurs et de variations dans l'enseignement de la fonction en seconde, nous allons tenter de dresser un bilan de nos différentes analyses. Nous pouvons d'ores et déjà dire qu'il y a des tendances fortes dans l'évolution curriculaire qui ont du mal à se mettre en œuvre dans les classes. Rappelons cependant que nos études ont essentiellement portées sur les premières années de la mise en place des programmes de 2000 (notamment, nous n'avons pas étudié les manuels sortis en 2004). Il se peut donc que certaines évolutions que nous avons jugées difficiles à mettre en œuvre aient eu un meilleur sort avec un peu plus de temps de maturation.

*Les tendances du nouveau programme de $2^{nde}$*

Nous avons constaté, à partir de l'analyse écologique de l'évolution des programmes (chapitre B1), qu'il y a une tendance assez forte à une modification structurelle dans l'enseignement des fonctions. Plusieurs modes de représentation de la fonction sont cités explicitement par le programme. Le registre algébrique n'est plus le seul mode d'entrée, d'une part parce qu'il y a une volonté de diversifier les modes d'entrée et d'autre part, parce que les connaissances algébriques des élèves entrant en seconde ont diminué. Ainsi il y a une injonction explicite à proposer assez systématiquement des tâches utilisant des registres variés comme registre d'entrée, notamment le registre graphique. Par ailleurs, il y a une demande de l'institution à un usage plus riche à la fois des tableaux de valeurs et des tableaux de variations dans leurs interactions avec d'autres modes de représentation. Ainsi, tableaux de valeurs et de variations ne sont plus seulement considérés comme des outils transitoires entre l'expression analytique de la fonction et le tracé graphique. Il semble bien que les auteurs de ces nouveaux programmes adhèrent à l'idée que les jeux sur les registres de représentation sémiotique soient un élément essentiel de l'apprentissage.

Il a également une ouverture à d'autres domaines extra-mathématiques (physique, biologie, etc) mais aussi intra-mathématique notamment par le biais de la modélisation, ce qui justifie également l'utilisation de différents registres.

Enfin, il est fait mention dans les programmes de l'utilisation de la calculatrice graphique en seconde pour l'étude des fonctions. Ainsi nous pensons que le statut de tableau de valeurs est changé puisqu'on peut avoir facilement accès à cet objet à partir de la touche « tableau de valeurs » et que certaines contraintes dues à la machine risquent d'avoir des conséquences sur cet objet.

Toutes ces évolutions, inscrites dans le programme de la classe de seconde, laissent penser qu'elles devront s'accompagner d'une évolution des types de tâches et des pratiques des professeurs : c'est ce que nous avons cherché à savoir par l'analyse des manuels et les questionnaires professeurs et élèves.

En revanche, toutes ces tendances concernent plus particulièrement le programme de 2$^{nde}$, puisqu'à partir de la classe de première, l'entrée algébrique retrouve une place centrale.

*Mise en place des tendances du nouveau programme dans les manuels*

En ce qui concerne la mise en place des tendances du nouveau programme dans les manuels nous avons montré qu'il existe un écart important entre les intentions affichées par les programmes et leur réalisation dans certains manuels qui privilégient toujours de façon massive le registre algébrique (et éventuellement graphique) au détriment des autres.

Ainsi la détermination a priori de la diversité des types de tâches qui peuvent mettre en lien le registre tableaux et les autres nous a permis de faire une comparaison avec les types de tâches proposées dans les manuels. Pour les quatre manuels étudiés (qui sont souvent ceux utilisés par les enseignants), nous avons montré une grande variabilité du nombre de ces types de tâches. Ainsi, les exercices de conversions relatifs aux tableaux de valeurs et de variations tiennent une place plus ou moins grande selon les manuels : un seul manuel aborde tous les types de conversions possibles, alors seules certaines conversions classiques sont proposées dans les autres.

Nous pouvons donc conclure qu'en ce qui concerne les tableaux de valeurs et de variations, leur utilisation est très différente suivant les manuels. Certains leur donnent un statut important alors que pour d'autres, leur rôle est très faible. De même pour certains, ils restent un outil pour tracer les courbes alors que pour d'autres ils ont un rôle dans l'acquisition des connaissances sur les fonctions.

Ainsi, on constate, dans cette première analyse, la difficulté et la diversité de mise en place de certaines nouveautés du programme.

*Les choix didactiques effectués par les enseignants et ce qui a été appris par les élèves*

L'analyse des manuels est, nous semble-t-il, confirmée par les analyses des questionnaires des professeurs et des élèves. Nous pouvons constater une grande diversité dans la prise en compte des tableaux dans la pratique de la classe : peu de travail explicite sur les codes relatifs aux tableau de variations, peu de tâches concernant les conversions de registres, seules les types de tâches classiques (tableau de valeurs/variations vers courbe) sont choisies par les enseignants et sont mieux réussies par les élèves. Notamment, les pratiques habituelles des professeurs de mathématiques actuels laissent encore peu de place à des exercices (concernant le registre tableaux et compatibles avec les nouveautés du programme) qui pourraient permettre de problématiser certaines notions et de les discuter pour faire avancer les connaissances des élèves sur les fonctions (par exemple, non unicité de la courbe à partir d'un tableau de valeurs).

Ceci peut s'expliquer, d'une part, par l'influence des divers programmes précédents qui font que les professeurs ont beaucoup de mal à se dégager de la prégnance de l'algèbre, puisqu'ils utilisent les fonctions depuis longtemps, qu'on leur a enseigné les fonctions dans un cadre très algébrique et donc, qu'ils ont du mal à intégrer d'autres facettes. D'autre part, nous pensons que les enseignants n'ont peut-être pas pris conscience que l'utilisation de différents registres est importante pour la compréhension de la notion de fonction. Ces premières explications mettent donc en jeu les connaissances mathématiques et didactiques des enseignants.

Plus précisément, la plupart des enseignants pensent que le tableau de valeurs est un objet qui ne nécessite pas d'être défini et que son utilisation va de soi. Notamment, il reste un outil qui ne sert qu'à tracer des courbes. Ainsi, l'exercice dans lequel on utilise le tableau de valeurs pour obtenir des informations sur la fonction est rejeté ou peu choisi par les enseignants. Quant aux élèves, il apparaît qu'ils ont déjà construit, sur cet objet, des connaissances en acte qui font qu'ils ont l'illusion d'unicité et d'exhaustivité de celui-ci dans la représentativité d'une fonction. En effet, de nombreux élèves font comme si toutes les informations pertinentes étaient contenues dans un tableau de valeurs et très peu d'élèves envisagent plusieurs cas de figures correspondant à un même tableau. Ainsi, ils n'ont pas pu répondre correctement à la question où on demandait de donner une autre courbe ou un autre tableau de variations à partir du même tableau de valeurs. Il semble donc que l'enseignement ne laisse que peu, voire pas, de place à un questionnement explicite sur la non-unicité de la représentation par et à partir d'un tableau de valeurs. Par ailleurs, la forme du tableau de valeurs influence très nettement les réponses des élèves et, ainsi, un tableau comportant toutes les valeurs entières de la variable sur un intervalle donné renforce l'idée d'unicité de la représentation. Notons de plus que la plupart des élèves gardent leurs connaissances privées sur cet objet jusqu'à la classe de terminale et que les erreurs persistent encore.

En ce qui concerne le tableau de variations, il est considéré comme indispensable pour l'étude des fonctions par les enseignants. Pourtant, aucun d'entre eux ne dégage de connaissance explicite ni sur sa construction, ni sur les codes et les codages utilisés. Quant aux réponses des élèves liées à cet objet, on trouve des résultats similaires au cas du tableau de valeurs : la plupart d'entre eux n'a pas pu répondre correctement à la question où on demandait de donner une autre courbe ou un autre tableau de valeurs à partir du même tableau de variations. Les mêmes difficultés que pour le tableau de valeurs semblent être en cause ici. De plus, se rajoutent visiblement, au moins en début d'apprentissage, des difficultés liées au sens du codage employé. Nous pensons donc que, comme pour le tableau de valeurs, les connaissances sur les tableaux de variations restent transparentes et ne fassent donc pas l'objet d'un enseignement explicite. Ainsi, la complexité du tableau de variations est certainement sous-estimée dans l'enseignement.

Cette partie nous a donc permis de déterminer un réseau de conditions et de contraintes qui font que certains éléments essentiels du nouveau programme n'arrivent pas à émerger dans l'enseignement. Nous avons donc élaboré une séquence d'enseignement pour faire fonctionner certains de ces points essentiels qui concernent particulièrement l'utilisation du registre tableaux. C'est ce que nous abordons dans la partie suivante.

# PARTIE C

## Expérimentation visant à tester la viabilité certains points phares des programmes 2000.

# PRESENTATION DE LA PARTIE C

## I. Introduction

A la lumière des analyses précédentes, nous avons déterminé certaines caractéristiques de l'organisation praxéologique proposée par les nouveaux programmes de 2000 autour de la notion de fonction. De plus, nous avons montré que certains types de tâches, voire certaines notions, ont du mal à vivre dans l'enseignement. Dans cette partie, nous nous proposons de produire une ingénierie didactique visant à faire fonctionner certains de ces aspects du programme dans des classes et à en tester la viabilité (en termes écologiques et économiques).

Ainsi, nous avons élaboré un ensemble de quatre séances avec une centration sur deux séances clefs mettant en œuvre des activités originales en début d'enseignement sur la notion de fonction et plus particulièrement sur l'utilisation des tableaux de valeurs et l'introduction du tableau de variations. Cet ensemble a été expérimenté en totalité dans une classe. Les quatre séances ont été filmées et analysées. Nous avons ensuite renouvelé l'expérimentation de la deuxième activité dans une autre classe de seconde, que nous avons également filmée, pour confirmer un résultat important et pour pallier à une difficulté technique rencontrée lors de la première expérimentation. Enfin, à l'issue de ces expérimentations, nous avons fait passer un test dans une autre classe de seconde pour conforter certaines de nos conclusions.

Dans cette partie C, nous présenterons le travail d'élaboration des activités, et leurs analyses a priori, les différentes expérimentations et leur analyse a posteriori.

## II. Présentation de l'ensemble des séances et des activités

Nous allons présenter rapidement l'ensemble des séances pour donner une idée globale des objectifs visés et de ce qui a été fait ; chaque activité sera ensuite analysée plus en détail.

Les objectifs principaux de ces quatre séances sont d'une part d'introduire l'idée de sens de variation et de tableau de variations et d'autre part, de favoriser les conversions entre différents registres (tableau de valeurs, tableau de variations et courbe), ce qui correspond aux objectifs du programme.

La première séance, élaborée par le professeur de la classe, avait pour but de reprendre des notions déjà vues en classe de troisième (image, antécédent, lecture graphique, etc) et d'introduire certaines premières définitions liées aux fonctions.

Dans la deuxième séance (séance de module donc en deux demi-groupes), nous souhaitions introduire l'idée de variations d'une fonction et le tableau de variations : pour cela nous avons proposé aux élèves un jeu de message (Activité 1) dans lequel la moitié de classe (groupes émetteurs) devait décrire une courbe à l'autre moitié (groupes récepteurs) qui devait la reproduire le plus fidèlement possible.

Pour des raisons de gestion de la classe (ne pas laisser la moitié de la classe inactive et ne pas dévoiler l'activité aux groupes récepteurs), nous avons proposé une autre activité (Activité 1bis, annexe C) qui consistait, à partir d'une courbe donnée sur quadrillage, à tracer d'autres courbes différentes qui passaient par trois points fixes de la première courbe. Le but était de faire comprendre aux élèves qu'entre deux points on pouvait non seulement modifier la courbure mais également introduire de nouvelles variations et de nouveaux extrema. Selon nous, cette activité avait un lien fort avec l'activité 1 et pouvait servir à aider les élèves. Nous ne ferons pas l'analyse complète de cette activité mais nous en dirons quelques mots lors de l'analyse a posteriori de l'activité 1.

Après ce travail de groupes, le professeur a collecté sur transparents les messages et les courbes produits et a organisé une mise en commun visant à faire discuter les élèves sur les messages et sur la conformité des courbes.

Il a ensuite introduit, en synthèse, le sens de variation d'une fonction, les notions de maximum et minimum et l'objet tableau de variations (séance trois).

Enfin, lors de la quatrième séance, en classe entière, nous avons proposé une activité de réinvestissement sur ces différents objets, composée de deux exercices (Activité 2) dans laquelle les élèves devaient mettre en lien les registres tableaux et graphique.

## III. Présentation des expérimentations

L'ensemble de ces séances a été expérimenté dans une classe ordinaire dans un lycée classique de l'agglomération lyonnaise en novembre 2003. Cette classe était, selon le professeur, d'un niveau plutôt bon et elle comportait six élèves redoublants. Toutes les séances ont été filmées : pour les séances 1, 3 et 4 (en classe entière), nous avons utilisé une seule caméra centrée sur le professeur, pour la séance 2 (deux demi-groupes) nous avons filmé, 4 des 6 groupes et enregistré sur cassette audio 2 autres groupes qui étaient seulement observés. Nous disposons donc de 4 films et de 2 enregistrements audio. Seule la séance 4 (activité 2) a été expérimentée et filmée à nouveau dans un autre lycée de l'agglomération lyonnaise quelques semaines plus tard.

Enfin la première partie de l'activité 1 a été reprise dans une classe d'un troisième lycée de Lyon l'année suivante. Cette fois-ci nous n'avons pas filmé mais nous avons simplement photocopié les productions des élèves.

En résumé, nous disposons des transcriptions de quatre séances en classe entière (annexe C), des transcriptions de six groupes et de leurs productions écrites (annexe C) et enfin de productions écrites pour la dernière expérimentation.

Pour ces trois expérimentations, nous avons dû travailler avec les professeurs avant les séances pour mettre en place le scénario, pour préciser les objectifs et pour définir le rôle du professeur. Les trois professeurs étaient volontaires pour cette expérimentation, ils sont des professeurs confirmés et ont des liens avec les didacticiens : en ce sens, ce ne sont pas des professeurs complètement ordinaires.

Pour la première classe qui correspondait à l'expérimentation la plus lourde, nous avons eu deux entretiens avec le professeur. Il s'agissait, d'une part, de lui expliquer assez précisément ce que nous voulions faire et, d'autre part, d'obtenir son adhésion sur les exercices et sur l'ensemble du dispositif à mettre en œuvre. Nous avons également pris en compte ce qu'il avait l'habitude de faire notamment pour la première séance qu'il a lui-même élaborée. En bref, nous avons voulu voir la faisabilité de notre proposition tout en tenant compte de ce qu'il avait l'habitude de faire.

Cette méthodologie n'est pas facile à mettre en œuvre car il s'agit d'établir une collaboration étroite entre le chercheur et le professeur. Le chercheur doit accepter des contraintes dues à la gestion de la classe, au temps d'enseignement et aux habitudes du professeur et le professeur doit intégrer fortement les contraintes du chercheur. Il doit également accepter d'être filmé et faciliter la prise de données.

Nous allons maintenant présenter les analyses a priori des deux activités clefs que nous avons proposées, puis nous donnerons les résultats que nous avons obtenus tout d'abord pour les séances 1 et 2, puis les séances 3 et 4.

# Chapitre C1

# Analyse a priori des activités

## I. Activité 1

### I.1. Présentation générale de l'activité 1

Comme nous l'avons dit, le but essentiel de cette activité est de voir comment les élèves, avant tout enseignement sur les fonctions, décrivent une courbe et, en particulier, d'évaluer la pertinence de leur argumentation par rapport à la représentation d'une fonction.

Nous proposons tout d'abord aux élèves un jeu de message dans lequel ils doivent décrire une courbe donnée, par tous les moyens qu'ils veulent (sauf une courbe), de façon à ce que leurs camarades puissent tracer une courbe la plus ressemblante possible. La classe est donc divisé en deux : des groupes deux ou trois élèves sont constitués, certains, les émetteurs devront écrire un message, les autres, les récepteurs devront tracer une courbe.

A cause du jeu de message, comme les groupes récepteurs doivent reproduire la courbe, le but de cette activité est de faire émerger la nécessité d'une description de la courbe en termes de variations continues dépassant ainsi la description point par point dont nous faisons l'hypothèse qu'elle sera prédominante.

Ensuite, le professeur fera une mise en commun des messages et des courbes obtenues. Celle-ci devra permettre de discuter de la pertinence des informations données par les groupes émetteurs et de la question de la ressemblance des courbes. En effet, nous sommes conscients de la relative et volontaire ambiguïté de la formulation « la plus ressemblante possible », mais elle doit permettre d'initier une discussion.

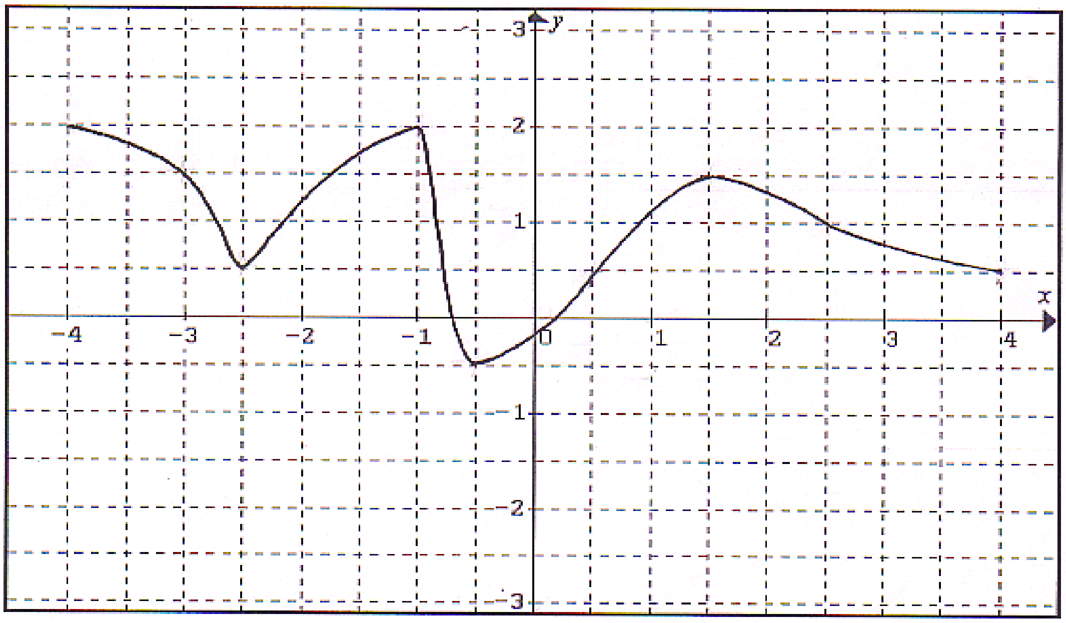
Ainsi pendant ce moment de mise en commun, c'est bien le statut des objets tableaux de valeurs et de variations (même si les élèves ne les ont pas encore produits) qui est en jeu ainsi que les liens entre tableaux et courbe.

Le professeur pourra donc montrer la non exhaustivité des données du tableau de valeurs et l'importance de la prise en compte des variations. De plus, grâce aux discussions sur « la plus ressemblante possible », il pourra également introduire le tableau de variations et montrer ses limites par rapport à la courbe.

Voici donc la courbe que nous avons proposée aux élèves des groupes émetteurs ; aux groupes récepteurs, nous avons donné des quadrillages vierges.

**Activité 1**

Vous devez donner, sur un seul transparent, des informations (tout sauf une courbe) sur la courbe ci-dessous, de sorte que vos camarades tracent une courbe qui ressemble le plus possible à cette courbe.




Si l'on considère une courbe indépendamment d'une fonction, on peut dire que c'est une ligne tracée dans le plan. Dans ce cas, pour décrire la courbe on peut faire appel à une description en termes de forme (par exemple, la courbe est arrondie, il y a un pointu, ça ressemble à, …) ou bien on peut relever des points qui semblent déterminants pour la forme (comme dans les jeux où l'on reproduit un dessin en reliant des points).

Si maintenant on pense la courbe comme représentant une fonction, on va donner des couples de coordonnées (conception de la fonction comme relation entre deux ensembles de valeurs). Les points choisis ne seront pas forcément les mêmes dans ces deux dernières conceptions.

Enfin on peut introduire des informations relatives à l'idée de variation. Dans une version discrète, cela peut conduire à donner systématiquement tous les points qui sont des extrema ; dans ce cas, il sera difficile de distinguer cette procédure de celle, relative à la description de forme, dans la mesure où les extrema sont aussi des points remarquables pour la forme.

Dans une version continue, on peut décrire globalement les variations par des expressions telles que « la courbe monte, descend, … ».

Détaillons maintenant les choix que nous avons faits pour cette courbe.

*Liste des variables didactiques :*

- Quadrillage (existence, pas)

- Domaine de définition de la fonction
- Ensemble image de la fonction
- Extrema (nombre, valeurs des abscisses, valeurs des ordonnées)
- Ordonnées des points à abscisses entières
- Nombre de points d'intersection avec les nœuds du quadrillage
- Possibilité de conjecturer une expression algébrique.

Nous avons choisi les variables de façon à favoriser la procédure de description en termes de variations continues.

- Quadrillage (existence, pas)

Nous avons choisi de fournir un quadrillage pour permettre une certaine lisibilité des points pour écrire les messages.

Le pas 1/2 est le même sur les deux axes. Nous avons choisi ce pas 1/2 pour différencier les procédures qui ne prendraient a priori en compte que les entiers et celles qui s'appuient sur le quadrillage. Cela nous permet de faire apparaître des nœuds du quadrillage sur la courbe qui ne correspondent pas à des abscisses ou à des ordonnées entières.

- Domaine de définition de la fonction

Nous avons choisi comme domaine [-4 ; 4]. En effet, il fallait une amplitude comprenant un nombre de valeurs entières assez grand (mais pas trop) pour laisser croire que connaître la fonction sur ces valeurs est suffisant pour décrire entièrement la courbe.

De plus nous avons choisi un intervalle symétrique par rapport à l'origine en conformité avec une pratique habituelle à ce niveau d'enseignement.

- Ensemble image de la fonction

Nous avons choisi [-0, 5 ; 2]. Ici les arguments essentiels sont liés à la place occupée sur la feuille et à une bonne lisibilité des variations.

- Extrema (nombre, valeurs des abscisses, valeurs des ordonnées)

Pour favoriser une description en termes de variations continues, il fallait avoir un nombre suffisant d'extrema, nous avons choisi d'en mettre 4 en plus des bornes.

Pour discriminer de la procédure « valeurs entières », nous avons placé 3 des 4 extrema locaux en des abscisses non entières. Toutefois, pour des questions de lisibilité, nous avons placé les 6 points correspondant aux extrema en des nœuds du quadrillage.

- Ordonnées des points à abscisses entières

Pour déstabiliser sans décourager entièrement la procédure « valeurs entières », nous avons donné aux 9 points à abscisse entière :

- 2 fois une ordonnée entière
- 2 fois une ordonnée demi-entière.

➢ Nombre de points d'intersection avec les nœuds du quadrillage

Au vu des variables didactiques précédentes, il fallait introduire des points de la courbe qui soient des nœuds du quadrillage sans être ni des points à coordonnées entières ni des extrema, de façon à pouvoir discriminer les différentes procédures par des observables.

Sur les 17 points à abscisse demi entière, 9 correspondent à des nœuds du quadrillage, dont les 6 extrema. Par ailleurs, 2 nœuds sur la courbe ne correspondent ni à des extrema, ni à des abscisses entières.

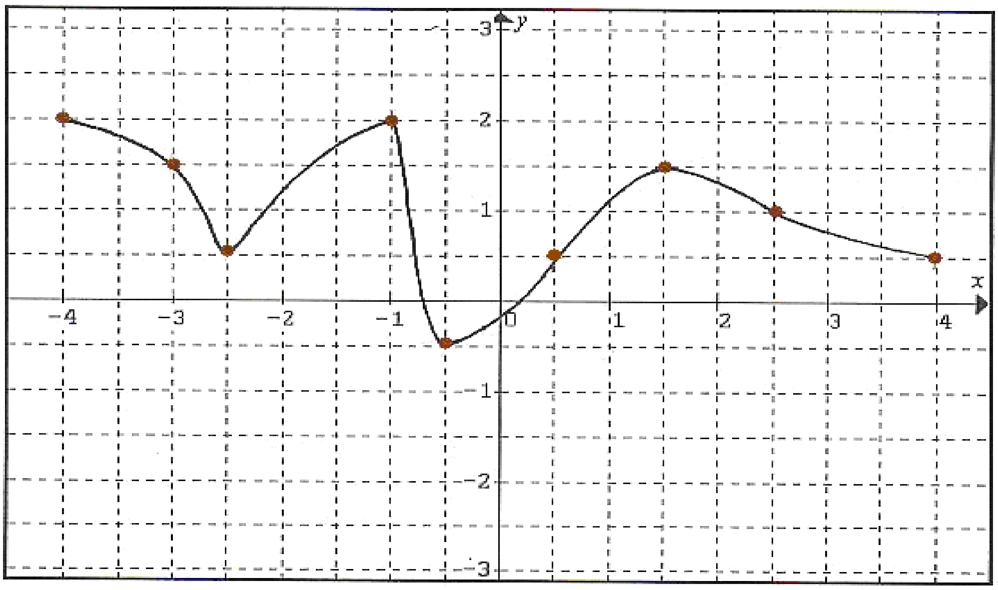
➢ Possibilité de conjecturer une expression algébrique

Nous avons choisi une courbe qui change du sens plusieurs fois et qui n'est pas habituelle pour la classe de seconde. Ainsi, nous avons voulu empêcher toute tentative pour retrouver une expression algébrique.

## I.2. Analyse a priori des procédures des élèves

### I.2.1 Groupes émetteurs

1) Si les élèves considèrent cette courbe comme une ligne tracée dans le plan, le quadrillage joue alors le rôle essentiel dans les descriptions qu'ils donnent. Ils peuvent donc donner les réponses suivantes :




- Soit ils donnent tout simplement les points d'intersection entre la courbe et le quadrillage sans utiliser une façon particulière de les présenter (**quadrillage simple**)
- Soit ils décrivent un programme de construction qui donne des informations sur la forme de la courbe. Ils donneront alors des réponses du type : « *Commencez par le point (-4 ; 2), puis allez jusqu'au point (-2,5 ; 0,5) en passant par le point (-3 ; 1,5) …* » en ne rendant compte que des nœuds du quadrillage sur la courbe (**quadrillage programme**).

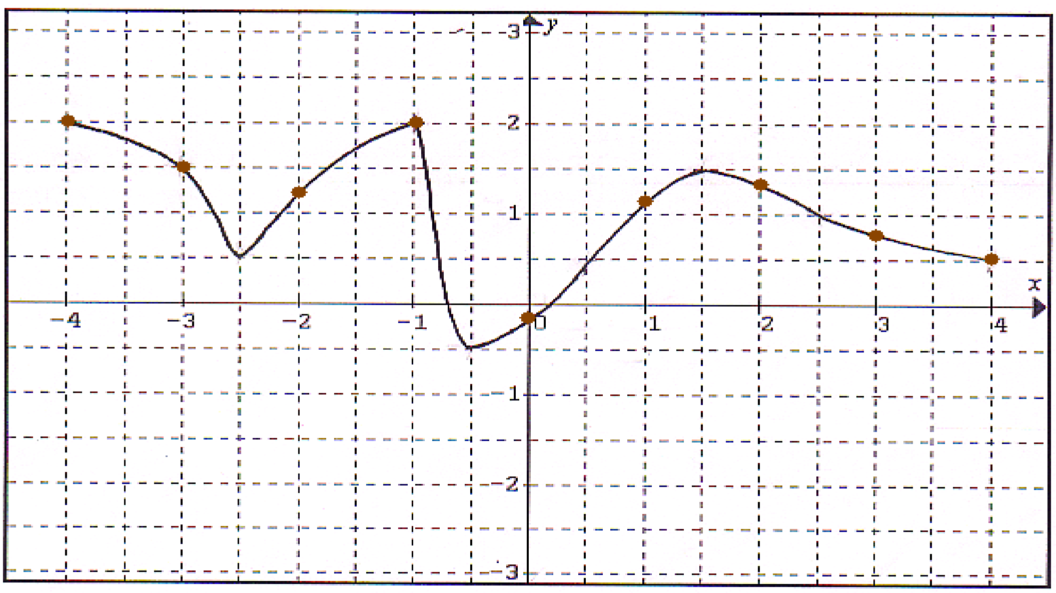
- Soit ils produisent un tableau de valeurs à partir des valeurs où il y a une intersection entre la courbe et le quadrillage. Ils peuvent ainsi donner le tableau de valeurs suivant (**quadrillage tableau**):

| ***x*** | -4 | -3 | -2,5 | -1 | -0,5 | 0,5 | 1,5 | 2,5 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***y*** | 2 | 1,5 | 0,5 | 2 | -0,5 | 0,5 | 1,5 | 1 | 0,5 |

Ceux qui utilisent ces procédures travaillent sur la courbe comme si c'était un dessin dans un quadrillage indépendamment de tout le reste. Ils se trouvent donc dans le domaine graphique et pas du tout dans la représentation d'une relation entre deux variables, comme si la fonction n'existait pas pour eux. En d'autres termes, le milieu matériel (quadrillage et courbe) renvoie à un jeu qui consiste à relever les « nœuds » du quadrillage qui se trouvent sur la courbe.

2) Si les élèves considèrent que cette courbe est une représentation d'une fonction (points marquant des correspondances entre valeurs), ils prennent alors des points remarquables par leurs valeurs mais pas par leurs positions sur la courbe. Ils rentrent ainsi dans un automatisme qui consiste à prendre, par exemple, toutes les valeurs entières des abscisses, avant même de se poser des questions sur la courbe.

Nous pensons que ces procédures sont guidées par la connaissance de ce qu'est un tableau de valeurs et les élèves le remplissent par rapport à la lecture de la courbe. Il s'agit donc d'un échantillonnage par les valeurs régulièrement espacées. C'est pourquoi les élèves n'utiliseront que le tableau de valeurs pour leurs réponses.




- Ils donneront ainsi le tableau de valeurs suivant avec toutes les valeurs des abscisses entières (**tableau entier**).

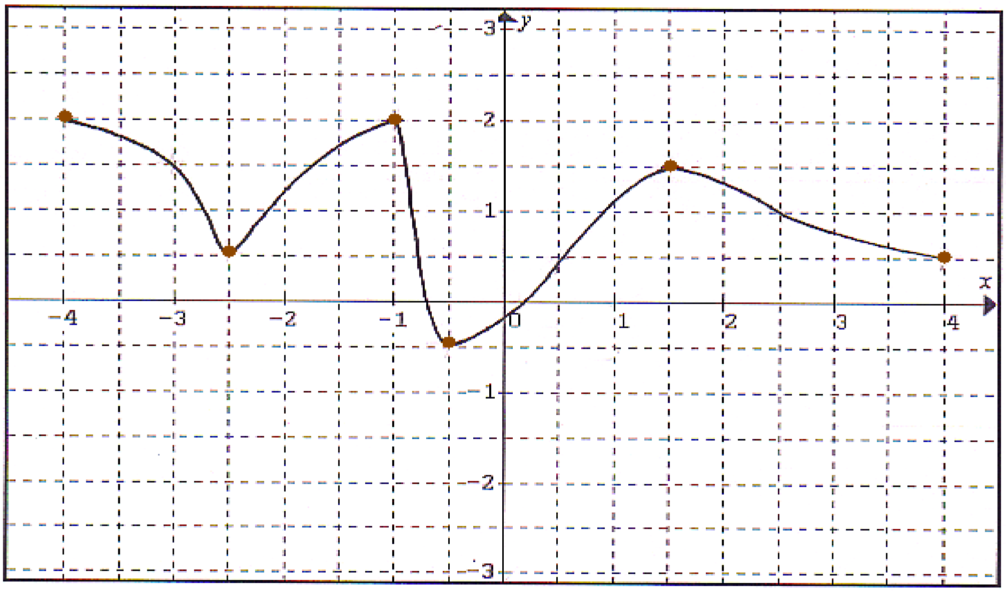
| ***x*** | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***y*** | 2 | 1,5 | 1,45 | 2 | -0,25 | 1,15 | 1,40 | 0,75 | 0,5 |

Les valeurs des ordonnées pour x = -2, 0, 1, 2 et 3 peuvent être données différemment par les élèves puisqu'il s'agit de valeurs approchées.

Comme nous l'avons prévu dans le choix de la courbe, cette stratégie est remise en cause par le fait qu'il faille donner des valeurs approchées ainsi que par le fait que beaucoup de points remarquable de la courbe ne sont pas pris en compte. Ainsi, les élèves peuvent basculer sur une autre stratégie (par exemple la stratégie « quadrillage »).

- Certains élèves peuvent mettre les points d'abscisses demi-entières en plus des points d'abscisses entières. Il s'agit bien ici de détecter les stratégies consistant à remplir systématiquement un tableau de valeurs à partir d'abscisses de forme déterminée (entiers ou demi-entiers) et pas seulement du rajout de certains points à partir des points d'abscisses entières (**tableau demi-entier**).

3) Les élèves peuvent donner des informations relatives à l'idée de variation. Dans ce cas, ils peuvent utiliser les procédures suivantes :



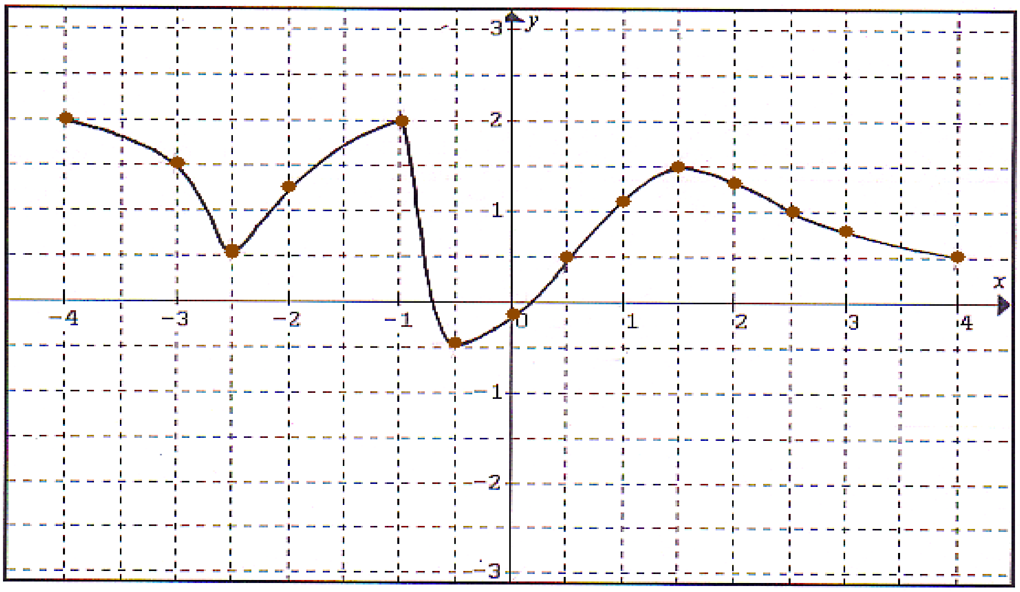

- Soit ils donneront tout simplement les points qui correspondent aux extrema sans utiliser une façon de les présenter. Ici les élèves n'ayant pas encore vu en cours ce que sont les variations et les extrema, il n'est pas simple pour eux de désigner les points correspondant aux extrema en tant que tels. Cependant, si ces seuls points sont donnés, on peut supposer que les élèves ont reconnu leur importance sans savoir les nommer (**extrema simple**)
- Soit ils écrivent un programme de construction qui donne des informations sur les variations de la courbe (utilisant des expressions telles que ça monte, ça descend, etc.) en faisant apparaître plus ou moins explicitement les extrema de la fonction. Ils donneront alors des réponses du type : « *Commencez par le point (-4 ; 2), puis descendez jusqu'au point (-2,5 ; 0,5) …* » (**extrema programme**).
- Soit ils produisent un tableau de valeurs à partir des points qui correspondent aux extrema de la fonction (ici la même remarque que pour la procédure extrema simple s'applique). Ils peuvent ainsi donner le tableau de valeurs suivant (**extrema tableau**):

| ***x*** | -4 | -2,5 | -1 | -0,5 | 1,5 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ***y*** | 2 | 0,5 | 2 | -0,5 | 1,5 | 0,5 |

Ceux qui utilisent ces trois stratégies ont une conception discrète relative à l'idée de variation sur la fonction.

- Certains élèves peuvent décrire globalement les variations par des expressions telles que « la courbe monte, descend, … ». Dans ce cas, on peut dire qu'ils ont une conception continue sur la fonction. (**variation continue**).

4) Les élèves peuvent avoir tendance à donner un maximum d'informations sur la courbe : soit un tableau de valeurs et des informations en langue naturelle (ça monte, ça descend, ça ressemble à une montagne, c'est pas régulier, ce ne sont pas des morceaux de droites, etc.) (**langue naturelle**), soit un maximum de points sur la courbe, par exemple toutes les coordonnées entières et les points du quadrillage (**tableau maximum**).




Voici un exemple que les élèves peuvent donner :

| **x** | -4 | -3 | -2,5 | -2 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***y*** | 2 | 1,5 | 0,5 | 1,25 | 2 | -0,5 | -0,25 | 0,5 | 1,15 | 1,5 | 1,40 | 1 | 0,75 | 0,5 |

Elle est proche de la stratégie quadrillage mais c'est une stratégie plus systématique.

Il ne sera pas toujours facile de distinguer les différentes procédures à la simple analyse du message final. Ainsi une procédure extrema simple renforcée par quelques points peut donner le même message que la procédure quadrillage. A ce sujet, il est à noter que le fait de ne pas avoir choisi de points qui correspondent à des extrema hors des nœuds du quadrillage rend la chose difficile, mais alors, la lecture des extrema aurait posé problème.

## I.2.2 Groupes récepteurs

Selon l'analyse a priori du travail des groupes émetteurs qui précède, on a vu qu'une des informations systématique qui sera donnée aux groupes récepteurs est un tableau de valeurs. Ainsi pour faciliter notre analyse a priori du travail des groupes récepteurs, nous allons commencer par faire une catégorisation des stratégies à mettre en œuvre pour tracer une courbe à partir de la donnée d'un tableau de valeurs.

**Catégorisation des stratégies à mettre en œuvre pour tracer une courbe à partir de la donnée d'un tableau de valeurs**

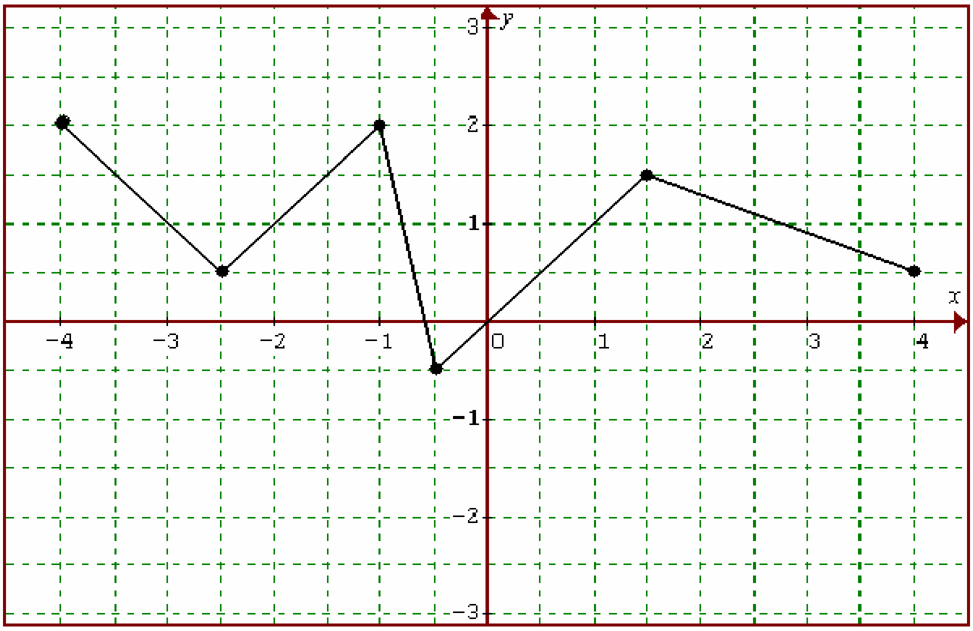
Les stratégies les plus naturelles consistent à ne considérer les extrema de la courbe que parmi les points proposés par les groupes émetteurs. De fait, dès que trois points successifs se trouvent dans une configuration non monotone, le point du milieu sera interprété comme un extremum, et les extrema de la courbe seront uniquement pris parmi ces points. Ce qui revient à considérer que la fonction ne change pas de sens de variation entre deux valeurs successives du tableau (**courbes simples**). On peut ainsi tracer les courbes des types suivants :

- Une première stratégie dans cette catégorie consiste à tracer la courbe en reliant les points donnés par le groupe émetteur par des segments de droite (**courbe simple rectiligne**). Ce type de tracé correspond à des graphiques couramment rencontrés dans la presse par exemple. Cette stratégie reflète une prise en compte assez primaire de la notion de variation, c'est une sorte d'adaptation aux données de la réduction de la notion de fonction aux seules fonctions affines. De plus, c'est aussi un moyen de renforcer l'idée qu'il n'y a qu'une réponse.

Considérons, par exemple, que le groupe émetteur ait donné comme information le tableau de valeurs suivant ;

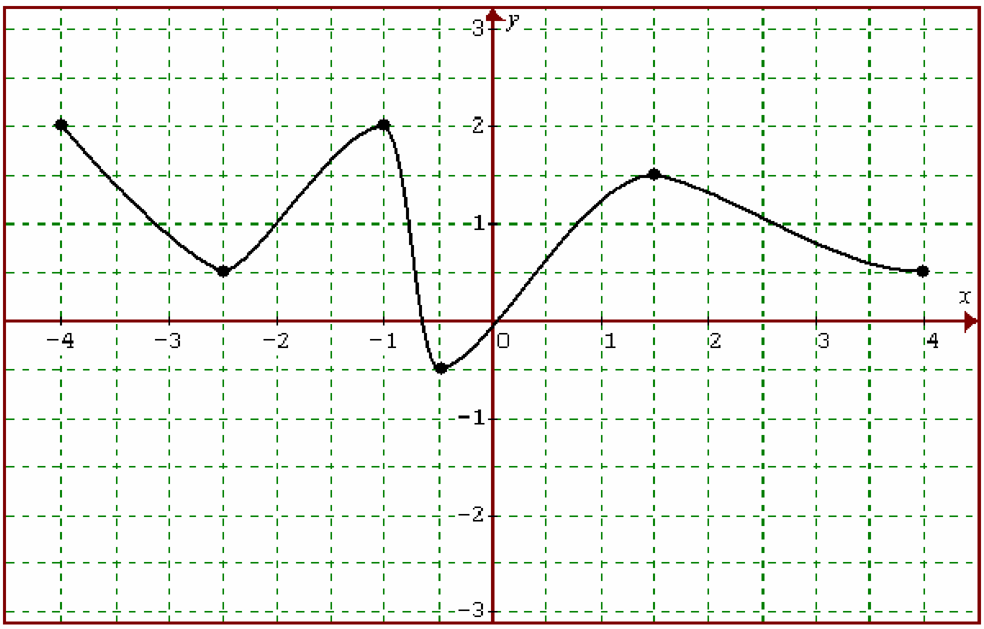
| $x$ | -4 | -2.5 | -1 | -0.5 | 1.5 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 2 | 0.5 | 2 | -0.5 | 1.5 | 0.5 |

Voici la courbe correspondant à ce tableau de valeurs pour cette stratégie :



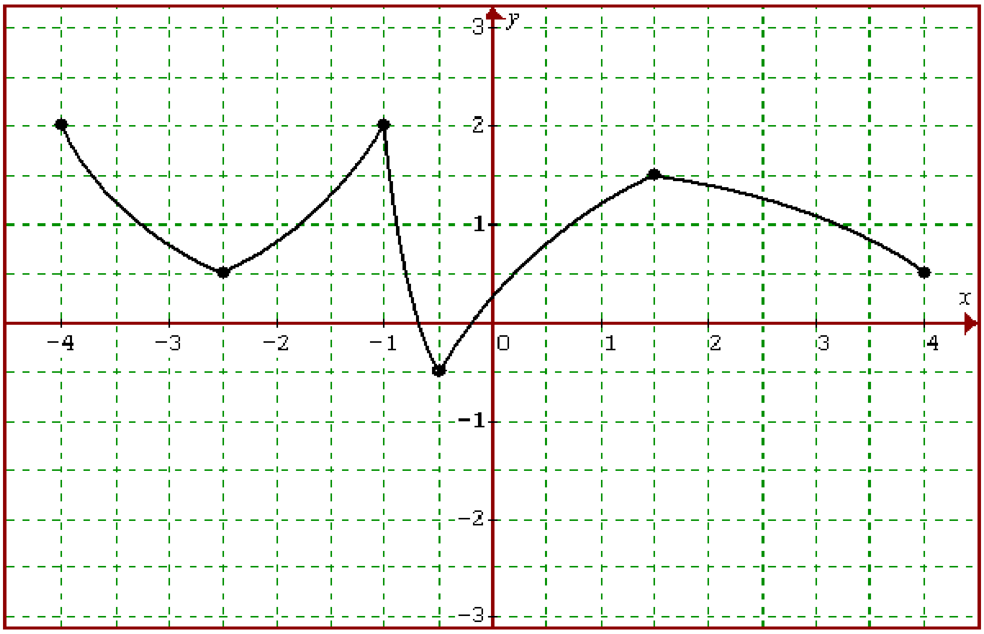

- Une autre stratégie consiste à « arrondir les angles » ou à tracer une courbe lisse à partir des mêmes contraintes, c'est-à-dire en respectant la monotonie entre deux points (**courbe simple lisse**). Dans ce cas, il n'y a pas qu'une seule façon de faire. De fait, cette stratégie, contrairement à la précédente, peut conduire à s'interroger sur l'unicité de la réponse alors que la mise en scène laisse penser qu'il n'y a qu'une « bonne » courbe. Toutefois la variabilité reste réduite et l'allure de la courbe à tracer n'offre que peu de possibilités.

A partir du même tableau de valeurs que précédemment, voici une des courbes de ce type qu'on peut tracer par cette stratégie :




- On peut également trouver des stratégies intermédiaires, consistant à joindre deux points par des traits courbes, sans (pouvoir) gérer la courbure globale de la courbe (**courbe**

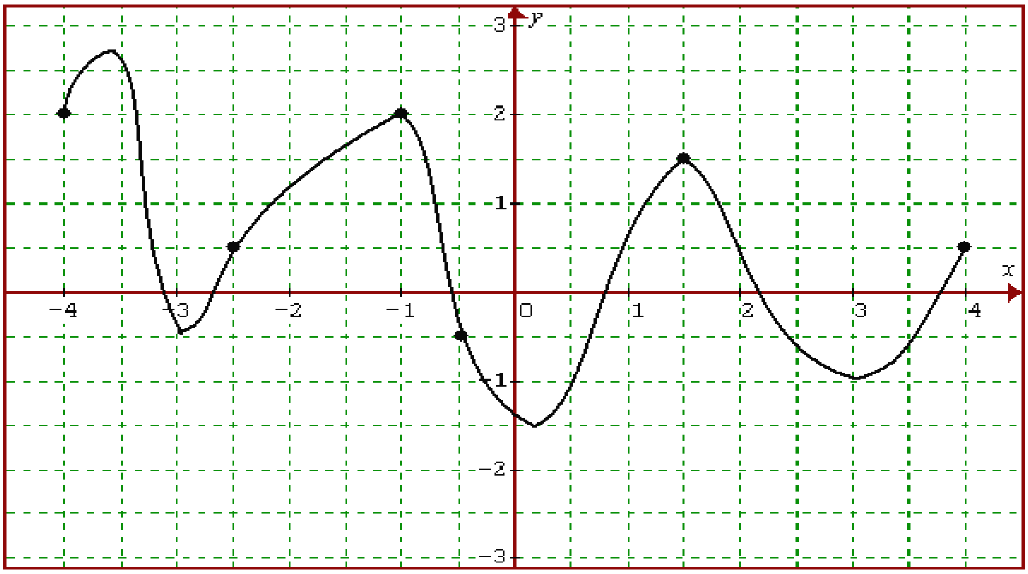
**simple arrondie**). On aboutit ainsi à une courbe avec des points plus ou moins anguleux, comme dans l'exemple ci-dessous :




Les autres stratégies vont conduire à des courbes qui ne respectent plus la monotonie entre deux points donnés par le groupe émetteur. On peut toutefois distinguer deux types très distincts de stratégies.

- Dans le premier type, les points candidats à être extremum parmi ceux donnés par le groupe émetteur continuent à influencer l'allure générale de la courbe, même s'ils ne restent pas forcément des extrema. En fait, il s'agit de faire intervenir des variations supplémentaires entre deux points successifs du tableau. On fait des vagues entre deux points (**courbe vague**). Dans ce cas, on peut faire plus ou moins de vagues, entre deux points seulement ou plusieurs ou tous systématiquement. Une difficulté ici consiste à bien respecter la définition d'une fonction. En effet, en faisant des vagues, on peut « revenir en arrière ». En fait, une réponse avec beaucoup de vagues, même si elle respecte bien la définition d'une fonction reflète une utilisation très libre du registre graphique peu commune dans le cadre des représentations des fonctions.

Voici une de courbes de ce type qu'on peut tracer à partir du même tableau de valeurs précédent ;




- Dans le deuxième type, les points donnés par les groupes émetteurs n'ont plus de particularité en termes de variations (**courbe libre**). Ainsi le tracé de la courbe n'a plus comme seule contrainte que de passer par ces points et les extrema se trouvent à peu près n'importe où.

A ce niveau de notre analyse, il est intéressant de remarquer qu'on peut voir une certaine similitude entre les stratégies 'courbe simple rectiligne et arrondie' et 'courbe vague' d'une part et les stratégies 'courbe simple lisse' et 'courbe libre' d'autre part. En effet, dans le premier cas, les trois stratégies partent d'une vision segmentée de la courbe qui se trace en envisageant le trajet (plus ou moins tordu) d'un point à son successeur. Dans le deuxième cas, au contraire, la courbe est envisagée dans sa globalité, les points donnés n'étant que des points de passage obligé sans déterminer l'allure globale. Reste que ceci est plus ambigu dans le cas de la courbe simple lisse qui peut aussi être une sorte de perfectionnement de la courbe simple rectiligne, dans le sens, où l'on ne sort pas du tracé d'un point à un autre, sauf que pour des questions de concavité (qui peuvent rester complètement implicites), dans le tracé d'une courbe lisse quand on rejoint un point à son successeur on est obligé de tenir compte de la position du suivant. Par ailleurs, la stratégie « courbe libre » peut n'intervenir que sur une partie limitée de la courbe, par exemple, un seul point candidat extremum est dégagé de sa contrainte d'être extremum sans modifier le reste du tracé.

Enfin, on peut envisager d'autres stratégies, qui nous semblent peu probables et que l'on classera pour cette raison dans la même catégorie. Il peut s'agir par exemple de tracer des courbes qui ne respectent plus la continuité.

### Analyse a priori de la tâche globale des groupes récepteurs

Quel que soit le tableau de valeurs donné par le groupe émetteur, les groupes récepteurs auront plutôt tendance à utiliser la stratégie courbe simple rectiligne ou lisse, surtout si le tableau de valeurs comporte beaucoup de valeurs peu éloignées les unes des autres. Puisque, d'une part, ils ont l'habitude d'utiliser la stratégie « courbe simple rectiligne » à partir de la classe de Troisième avec l'étude des fonctions affines et linéaires. D'autre part, au moins depuis la classe de seconde les élèves perçoivent que les courbes représentatives des fonctions sont en général lisses.

Les stratégies « courbe vague » et « courbe libre » sont plus difficilement envisageables par les élèves. Elles ont toutefois plus de chance d'apparaître si les valeurs du tableau de valeurs sont assez éloignées l'une à l'autre. L'apparition d'une de ces stratégies chez un des élèves d'un groupe récepteurs peut conduire à une discussion au sein du groupe qui peut amener à remettre en cause la possibilité de trouver « la » bonne réponse. Mais la conviction qu'il faut trouver « une » bonne réponse peut au contraire faire écran de façon très forte et empêcher ces stratégies d'émerger. Il sera donc important de bien analyser les interactions du groupe pour voir si une de ces stratégies n'a pas commencé à apparaître tout en étant rejeté par les autres membres du groupe et de fait n'apparaissant plus dans la production finale.

Les informations qui pourraient être données par les groupes émetteurs, autres qu'un tableau de valeurs, auront comme effet de mieux circoncire l'allure de la courbe. Soit en spécifiant les extrema soit en précisant que la courbe est lisse. Elles auront donc pour effet de faire barrière à d'éventuelles stratégies. Par exemple, un groupe émetteur peut dire que la courbe doit être « tracée à la main sans faire de droites » ou « qu'elle est arrondie » ce qui bloque la stratégie « courbe simple rectiligne ». Ils peuvent aussi donner un programme de construction en disant que l'on doit descendre à partir de tel pont jusqu'à tel autre puis monter jusqu'à tel autre, etc. Ceci bloque les stratégies « courbe vague » ou « courbe libre ».

# II. Activité 2

## II.1 Présentation générale de l'activité 2

### II.1.1 Les objectifs de l'activité

Le but essentiel de cette activité consiste à voir comment les élèves perçoivent les différentes conversions entre le registre tableau de valeurs, le registre tableau de variations et le registre graphique.

Les expérimentations déjà faites nous ayant montré que pour la plupart des élèves il y a une certaine transparence entre le registre graphique et le registre tableau de valeurs (par exemple, il y a une illusion de certains élèves sur le fait qu'on ne peut tracer qu'une seule courbe à partir d'un tableau de valeurs), nous voulions donc permettre de problématiser cette question de la non correspondance entre ces deux registres.

D'autre part, nous avons montré que la façon de coder le tableau de variations d'une fonction est souvent considérée comme non problématique, si bien qu'on ne trouve dans aucun manuel d'explication sur la façon de faire ce tableau. L'analyse des questionnaires des enseignants ainsi que des élèves nous a permis également de dire que l'enseignement ne prévoit pas de situation rendant fonctionnelle sa construction et son utilisation, et il n'y a pas d'élaboration des connaissances nécessaires à son utilisation. Ainsi l'élève ne se voit pas souvent renseigné explicitement sur la construction de cet outil et, le plus souvent, le professeur montre par un geste (exemple de tableau de variations tracé au tableau noir devant les élèves) sans expliquer vraiment les parentés et les différences entre un tableau de variations et les autres registres (plus particulièrement le registre graphique et le tableau de valeurs). Nous souhaitions donc proposer une situation dans laquelle le tableau de variation serait plus fortement impliqué.

Nous faisons l'hypothèse qu'une meilleure connaissance sur le tableau de valeurs et le tableau de variations peut aider à la conceptualisation de la notion de la fonction. Ainsi nous voulons faire réfléchir les élèves sur ces deux types de tableaux et surtout sur les codes et les codages utilisés dans un tableau de variations. Cette activité 2 vise en priorité à l'institutionnalisation des connaissances suivantes :

- Un tableau de valeurs ne donne que des informations très partielles sur une fonction. Donc à un tableau de valeurs peut correspondre plusieurs courbes et plusieurs tableaux de variations
- De même à un tableau de variations peuvent correspondre plusieurs fonctions donc plusieurs courbes et plusieurs tableaux de valeurs. Par contre, à une fonction ne correspond qu'un seul tableau de variations.

### II.1.2 Présentation des exercices et déroulement

Cette activité comporte deux exercices liés entre eux mais les élèves ne le savent pas au début ; elle se déroule en classe entière, les élèves travaillent individuellement. Cette activité se déroule en trois temps.

- Les élèves répondent sur feuille à l'exercice 1, puis on ramasse leurs réponses.
- Ils répondent individuellement aussi à l'exercice 2.
- Enfin on distribue leurs réponses pour l'exercice 1, sans ramasser l'exercice 2, et on leur dit « donc voilà vous avez répondu à l'exercice 2, je vous redonne l'exercice 1, si vous voulez modifier vos réponses faites-le en utilisant une autre couleur et sans effacer votre première réponse »

**Exercice 1**

Il concerne le changement du registre tableau vers le registre graphique. A partir d'un tableau de valeurs, on demande à l'élève de tracer une courbe compatible avec ce tableau, puis on lui demande s'il en existe d'autres. Voici donc l'exercice que nous avons proposé aux élèves :

« Soit une fonction f définie sur l'intervalle [-3; 3] dont on connaît le tableau de valeurs suivant :

| ***x*** | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***f(x)*** | 2 | 1 | -1 | 0 | 0.5 | 1 | 2 |

**a.** Tracer une courbe compatible avec ce tableau de valeurs.

**b.** Peut-on en tracer d'autres ? Si oui, utilisez le dos de la feuille pour donner votre réponse.
Si non, expliquer ».

Nous avons choisi de donner un tableau de valeurs « classique », c'est-à-dire conforme avec la pratique habituelle à ce niveau d'enseignement d'après notre analyse des manuels (chapitre B2) ; Il ne comporte que des valeurs entières de x et les valeurs sont espacées avec un pas constant (1), l'intervalle de définition est symétrique par rapport à 0. Il comporte 7 valeurs, il est donc suffisamment important pour que les points qu'il fournit donnent une allure de courbe possible.

Nous avons donné un repère orthonormal quadrillé pour la question a) et trois repères (après avoir laissé assez de place pour ceux qui disent « non » et leurs explications) au dos de la feuille pour la question b). Ceci est fait pour faciliter la tâche de l'élève et pour laisser assez de temps pour l'exercice 2.

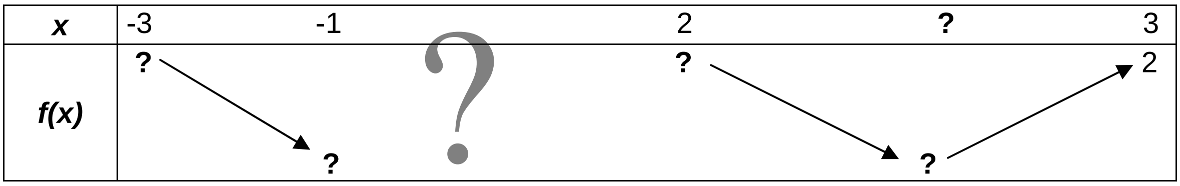
**Exercice 2**

Il concerne le changement du registre tableau de valeurs vers le registre tableau de variations. A partir du même tableau de valeurs que celui de l'exercice 1, on demande à l'élève de compléter un tableau de variations pour qu'il soit compatible avec le tableau de valeurs donné, puis on lui demande s'il y en a d'autres. Voici l'exercice que nous avons proposé :

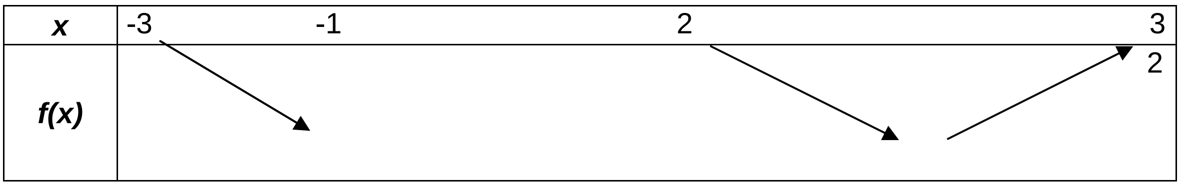
« Soit une fonction f définie sur l'intervalle [-3; 3] dont on connaît le tableau de valeurs suivant :

| ***x*** | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***f(x)*** | 2 | 1 | -1 | 0 | 0.5 | 1 | 2 |

**a.** Complétez le tableau de variations ci-dessous pour qu'il soit compatible avec ce tableau de valeurs.




Votre réponse :




**b.** Y a-t-il d'autres façons de le compléter ? Si oui, lesquelles ?
Si non, expliquez ».

Nous avons choisi de donner le même tableau de valeurs que celui de l'exercice 1, sans toutefois le préciser aux élèves, nous voulions qu'ils le constatent eux-mêmes et qu'ils fassent un lien entre les deux exercices. Nous faisons l'hypothèse que, dans l'exercice 1, il est fort probable que la plupart des élèves répondent naturellement qu'il n'y a pas d'autre courbe, après avoir tracé une première courbe (avec les segments de droite ou la plus « lisse ») compatible avec ce tableau de valeurs (en effet dans le questionnaire que nous avons déjà fait passer (chapitre B4), seulement 11 % des élèves ont proposé une autre courbe, après avoir tracé une courbe « simple lisse », à partir d'un tableau de valeurs). L'exercice 2 est en quelque sorte un moyen de faire émerger cette idée si elle n'était pas apparue avant. Donc, nous voulions que ceux qui n'arrivent pas à tracer différentes courbes pour l'exercice 1b, reviennent en arrière à l'aide de cet exercice 2, en voyant qu'on peut avoir plusieurs tableaux de variations, pour pouvoir donner d'autres courbes. Pour ce faire, le tableau que nous demandons de compléter comporte des informations non compatibles avec l'allure de la courbe « la plus simple » compatible avec le tableau de valeurs.

*Le choix du tableau de variations :*

Dans le tableau de variations que nous avons donné, il s'agit d'abord de remplir les valeurs correspondantes de certaines valeurs de x. Nous voulons ainsi monter qu'il y a certains points communs entre ces deux tableaux (tableau de valeurs et de variations).

Ensuite nous imposons que la fonction ne soit pas monotone sur l'intervalle [2 ; 3], ce qui n'est pas visible dans le tableau de valeurs donné. Nous voulons ainsi monter aux élèves que entre deux points d'abscisses entières, la fonction peut changer du sens de variation et cela ne se voit pas dans le tableau de valeurs.

Enfin nous avons mis un grand point interrogation sur l'intervalle [-1 ; 2]. Ceci est fait pour vérifier si les élèves peuvent penser à introduire d'eux-mêmes la non-monotonie à un endroit où le tableau de valeurs ne donne pas d'information.

*Le choix de l'énoncé :*

Nous aurions pu demander aux élèves « le tableau de variations ci-dessous peut-il être compatible avec ce tableau de valeurs ». Dans ce cas, les élèves auraient pu dire (de façon erronée) « non ». Nous avons donc choisi de dire : « compléter le tableau de variations ci-dessous pour qu'il soit compatible avec ce tableau de valeurs ». Nous avons voulu ainsi imposer l'idée que cela peut être compatible, pour déclencher une réflexion de la part des élèves.

## II.2 Analyse a priori des procédures des élèves

### II.2.1 Exercice 1

*Question 1a*

Nous faisons l'hypothèse que tous les élèves vont tracer une courbe «simple lisse ou rectiligne », après avoir placé les points du tableau de valeurs sur le repère. Puisqu'il est rare de rencontrer une fonction ayant un comportement « erratique » entre deux points d'abscisses entières successives. De plus, nous avons vu dans l'analyse des manuels que les élèves sont habitués à rencontrer des courbes représentatives des fonctions sont en général lisses. Ainsi, par une sorte d'effet de contrat, les élèves auront certainement du mal à imaginer autre chose que la courbe « simple lisse » correspondant à ce tableau de valeurs. Nous appellerons cette courbe « courbe initiale » en opposition aux autres courbes tracées dans la question 1b.

*Question 1b*

Comme nous l'avons vu dans l'analyse des manuels, on insiste très peu sur le fait qu'à un tableau de valeurs peuvent correspondre plusieurs représentations graphiques. De plus, la plupart des élèves disaient « non » à notre questionnaire pour tracer une autre courbe, après en avoir en tracée une, à partir d'un tableau de valeurs. Ceci nous conduit à prévoir que vraisemblablement beaucoup d'élèves ne vont pas arriver à tracer d'autres courbes pour cette question. En effet, ils peuvent être persuadés qu'ayant ce tableau de valeurs il existe une et une seule fonction. Ceci peut être justifier par les élèves avec les différents arguments que nous avons déjà cités pour la question 1Bb du questionnaire des élèves (cf. chapitre B4).

Pourtant, certains peuvent tracer autres courbes, ceci nous montre que ;

- soit ils ont conscience qu'un tableau de valeurs ne donne que des informations partielles et qu'entre deux valeurs d'abscisses entières on ne sait pas ce qui se passe au niveau du sens de variation,
- soit ils se trouvent dans le registre « dessin » et ils tracent plusieurs courbes mais sans nécessairement respecter les contraintes sur la représentativité d'une fonction (ils peuvent alors tracer des courbes qui ne respectent pas la définition d'une fonction).

Voici les catégorisations des courbes que les élèves peuvent tracer :

**Catégorisation des stratégies à mettre en œuvre pour tracer d'autres courbes**

*1. Courbes ressemblantes à la courbe initiale*

Dans ces stratégies, c'est la courbe initiale qui guide le tracé des autres courbes. On fait un léger changement sur une partie ou sur toute la courbure de la courbe initiale en gardant sa globalité. La stratégie consiste toujours à faire un tracé point par point en reliant les points donnés dans le tableau de valeurs. Les extrema de la courbe initiale sont conservés :

- Une première stratégie dans cette catégorie consiste à tracer la courbe en reliant les points par des segments de droite, si la courbe initiale est lisse ou à contraire on trace une courbe lisse si la courbe initiale est rectiligne par morceaux.
- Une autre stratégie consiste à changer la courbure de la courbe initiale sur certains intervalles sans introduire des nouveaux extrema. On garde les autres parties de la courbe initiale.
- On peut trouver des stratégies consistant à faire de légers changements par rapport à la courbe initiale ou bien des virages autour de la courbe initiale sur tout un intervalle.
- On peut également trouver des stratégies consistant à tracer de légers zigzags qui soit, n'induisent pas de changement de variation, soit de très légers. On change un peu la forme de la première courbe.

Ces deux dernières stratégies que l'on peut qualifier de courbes « vagues » peuvent assez facilement conduire à des courbes qui ne respectent plus la définition d'une fonction, en particulier là où deux points successifs du tableau de valeurs ont des abscisses proches mais des ordonnées éloignées.

*2. Introduction de nouveaux extrema*

On trace des courbes en changeant « profondément » de la courbe initiale seulement entre une des deux points successifs pour n'introduire qu'un nouveau minimum ou une maximum (ceci peut ou non être répété plusieurs fois)

Ceci nous montre que ces élèves ont clairement pris conscience que entre deux valeurs successive d'abscisses entières du tableau de valeurs la fonction peut changer du sens de variation.

*3. Courbes « libre »*

On trace des courbes indépendamment de la courbe initiale qui n'a alors plus aucune influence sur le nouveau tracé. Ainsi le tracé de la courbe n'a plus comme seule contrainte que de passer par les points du tableau de valeurs et les extrema se trouvent à peu près n'importe où. Plusieurs extrema peuvent apparaître entre chaque point donné par le tableau de valeurs initial alors que ces points ne sont plus nécessairement considérés comme des extrema.

*4. Courbes ne représentant pas d'une fonction*

On trace des courbes qui ne correspondent pas à des fonctions (tracé de segments verticaux types créneaux, des courbes qui reviennent en arrière, qui font des boucles, etc.). Dans ce cas, nous faisons l'hypothèse que les élèves se placent davantage du côté du dessin que celui de l'activité mathématique.

Il sera intéressant de constater comment les élèves vont tracer trois courbes (puisque nous avons mis trois repères !) : Soit ils peuvent toujours rester dans une seule stratégie (par exemple ils tracent toujours des courbes ressemblantes à la courbe initiale), soit ils peuvent chaque fois changer de la stratégie. Il sera également important de relever ceux qui tracent des courbes qui ne respectent plus la définition d'une fonction.

## II.2.2 Exercice 2

*1) La correspondance univoque entre tableau de valeurs et tableau de variations*

Les élèves peuvent compléter le tableau de variations selon les données du tableau de valeurs et seulement celles-ci. Ils n'introduisent aucune valeur entre 2 et 3 et même disent que c'est impossible. Ils considèrent que la fonction est croissante sur [-1 ; 3] ce qui est compatible « directe » avec le tableau de valeurs de la question. Ceci les conduit au tableau de variations suivant :

| x | -3 | | -1 | | 2 | | | | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 2 | ↘ | 1 | ↗ | 1 | ↘ | | ↗ | 2 |

Face à la partie entre 2 et 3 les élèves peuvent réagir d'au moins deux façons distinctes :

- Certains élèves peuvent répondre « non, ce tableau de variations est impossible, puisque la fonction n'est que croissante sur l'intervalle [-1 ; 3] et on ne peut pas changer les données ». Ainsi ils nous montrent qu'ils n'arrivent pas à envisager que la fonction puisse ne pas être monotone entre deux valeurs d'abscisses entières.

- Certains élèves peuvent répondre « on ne peut pas répondre à cette question, car on ne nous donne que certaines valeurs de x et il y a plusieurs valeurs qu'on ne connaît pas. On ne peut pas deviner le x et son correspondant, etc. » sans compléter le tableau de variations donné. Ils montrent ainsi un certain degré de compréhension, mais n'ont pas encore une maîtrise suffisante du tableau de variations pour répondre correctement. En plus, ils considèrent que les valeurs données ont des particularités importantes.

La dernière stratégie que nous venons de citer nous donne l'autorisation de faire l'hypothèse qu'il s'agit d'une tâche hors du contrat pour les élèves. Puisque, comme nous l'avons vu dans l'analyse des manuels, les valeurs sont calculées à partir d'une formule ou d'une courbe ; « Invention des valeurs qui ne sont pas produits par un calcul (par exemple)» peut gêner les élèves et ainsi ils utilisent cette stratégie par cet effet du contrat.

1bis) Les élèves peuvent introduire un point dans l'intervalle [2 ; 3] dont les coordonnées sont les moyennes des coordonnées de (2 ; 1) et de (3 ; 2), ce qui n'est pas conforme avec les variations de la fonction. Ces élèves, comme les précédents, travaillent essentiellement dans le registre numérique, pour eux compléter le tableau de variations revient à intercaler des nombres dans celui-ci et les flèches ont encore un sens obscur. Voici le tableau de variations produit :

| x | -3 | -1 | 2 | **2.5** | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 2 | | 1 | | 2 |
| | | 1 | | **1.5** | |

Nous pensons que ces élèves garderont la même idée pour la question 2b, et ils vont choisir des valeurs toujours comprises entre 2 et 3 pour les abscisses et entre 1 et 2 pour les ordonnées.

*2) La correspondance directe entre tableau de valeurs et tableau de variations*

Certains élèves peuvent vouloir reporter toutes les valeurs du tableau de valeurs dans le tableau de variations, donc ils rajouteront des valeurs qui n'ont pas de raison d'être dans le tableau de variations. Ainsi ils ne peuvent envisager que la fonction ne soit pas croissante sur [-1 ; 3], selon les données du tableau de valeurs. Ces élèves ne répondront pas à la question b ou répondront non.

Type a)

| x | -3 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 2 | | 0 | | 1 | 2 |
| | | -1 | | 0.5 | X | |

Type b)

| x | -3 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 2 | | | | | |
| | | -1 | | | | |

Ces réponses indiquent certainement que les élèves ont du mal à abandonner certaines informations lors du passage au tableau de variations, et en plus la réponse du type a) montre plutôt une conception non suffisamment globale de la fonction. Dans les deux cas, les élèves ont du mal à distinguer la nature et la fonction du tableau de valeurs et du tableau de variations.

*3) Réponse compatible avec le tableau de valeurs.*

- Les élèves peuvent remplir avec des coordonnées compatibles qui se trouvent dans l’intervalle [2 ; 3], sans introduire des variations et des valeurs dans l’intervalle [-1 ; 2]. Ils peuvent souvent choisir la valeur « 2.5 » entre 2 et 3. Voici le tableau de variations :

| x | -3 | | -1 | | 2 | | **2.5** | | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 2 | ↘ | 1 | ↗ | 1 | ↘ | **<1** | ↗ | 2 |

Ces élèves n’introduisent pas, non plus, des variations et des valeurs dans l’intervalle [-1 ; 2] pour la question b. Ils ne changent que des valeurs qu’ils ont intercalé dans l’intervalle [2 ; 3].

- Les élèves peuvent, pour produire d’autres tableaux de variations, introduire des valeurs dans [-1 ; 2] à partir de la question b. Par exemple,

Réponse a)

| x | -3 | | -1 | | 2 | | 2.5 | | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 2 | ↘ | -1 | ↗ | 1 | ↘ | 0 | ↗ | 2 |

Réponse b)

| x | -3 | | -1 | | 0 | | 0.5 | | 2 | | 2.8 | | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 2 | ↘ | -1 | ↗ | 0 | ↘ | -8 | ↗ | 1 | ↘ | -5 | ↗ | 2 |

- Les élèves peuvent commencer à introduire des valeurs dans [-1 ; 2] dés le début (question a.), par exemple :

| x | -3 | | -1 | | 1 | | 1.5 | | 2 | | **2.5** | | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 2 | ↘ | 1 | ↗ | 0.5 | ↘ | -3 | ↗ | 1 | ↘ | **<1** | ↗ | 2 |

- Les élèves peuvent introduire des valeurs entre [-1 ; 2] sans donner une réponse entre [2 ; 3]. Par exemple,

| x | -3 | | -1 | | 0 | | 0.9 | | 2 | | | | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 2 | ↘ | 1 | ↗ | 0 | ↘ | -0.5 | ↗ | 1 | ↘ | | ↗ | 2 |

- Nous pouvons penser que, pour répondre à cette question correctement ou non, certains élèves vont passer par une représentation graphique. Cependant nous n'aurons que peu d'indices sur cette procédure sauf si l'élève trace effectivement une courbe ou bien s'il en rend compte dans ses explications.

### II.2.3 Retour en arrière (de l'exercice 2 à l'exercice 1)

Bien entendu ceux qui n'ont donné qu'une courbe à l'exercice 1 et n'arrivent pas à répondre à l'exercice 2, ne voudront vraisemblablement pas non plus modifier leurs réponses à l'exercice 1. Par contre, pour ceux qui répondent correctement à l'exercice 2, il y a deux possibilités :

- Soit ils ne veulent pas modifier leurs réponses à l'exercice 1. Ceci nous montre qu'ils ne voient pas le lien entre le registre tableau de variations et le registre graphique.
- Soit ils modifient leurs réponses à l'exercice 1. Dans ce cas, on peut voir deux types de modifications : Certains élèves font la modification selon les variations du tableau de variations donné. Donc ils n'arrivent pas à tracer librement des courbes, ou bien certains élèves arrivent, grâce à l'exercice 2, à comprendre qu'entre deux valeurs du tableau de valeurs, la fonction peut changer de sens de variation et dont ils tracent des courbes indépendamment du tableau de variations donné.

Dans la partie suivante, nous allons analyser les réponses à ces différents exercices.

# Chapitre C2

# Analyse des première et deuxième séances

## I. Première séance sur la fonction (cours : généralités sur les fonctions)

Avant la première séance, comme nous l'avons déjà dit, nous avons eu deux entretiens avec le professeur. Il s'agissait, d'une part, de lui expliquer assez précisément ce que nous voulions faire et, d'autre part, d'obtenir son adhésion sur les exercices et l'ensemble du dispositif à mettre en œuvre. En bref, nous avons voulu voir la faisabilité de notre proposition tout en prenant en compte ce qu'il avait l'habitude de faire.

Dans ce cadre, la première séance n'a pas été élaborée par nous. Elle avait pour but d'introduire certaines premières définitions liées aux fonctions. C'est une séance que le professeur réalise chaque année avec des documents semblables. Plus précisément, en partant d'une activité fondée sur une situation concrète (courbe de la concentration du paracétamol dans le sang en fonction du temps écoulé), le professeur a demandé de lire des informations sur la courbe (voir annexe C), puis il a introduit les notions d'image, d'antécédents, de fonction et de l'ensemble de définition.

Cette séance a été observée et filmée. Nous avons ainsi pu constater que les élèves avaient des connaissances élémentaires sur les fonctions, acquises en fin de collège, comme les notions d'abscisse et d'ordonnée. Dans l'ensemble, la réussite à l'activité a été plutôt bonne. Faisons deux remarques qui auront leur importance pour la suite. Tout d'abord, il est à noter que le professeur n'a pas voulu que les élèves donnent les valeurs approchées pour certaines valeurs, il a préféré des intervalles. Ensuite, quand les élèves ont rempli le tableau de valeurs, il a introduit la définition d'une fonction et la notion d'ensemble de définition, en ces termes :

> Définition : Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles de IR. On définit une fonction f sur D si à chaque réel x de D on associe <u>un réel et un seul</u>.
> On note ce réel f(x) on lit « f de x »
> D est l'ensemble de définition de f. Le réel f(x) est <u>l'image de x par f</u>. Si f(x) = y on dit que x est <u>un antécédent de y par f</u>.
> On peut noter la fonction de la manière suivante :
> $f : x \rightarrow f(x)$ pour $x \in D$

Il a également dicté une autre définition liée à l'activité du paracétamol.

> On appelle f la fonction qui a chaque instant t de [10 ; 240] fait correspondre la concentration du paracétamol dans le sang.

Il a introduit les notions d'image et d'antécédent à partir de la même activité et chaque fois il a employé ces deux mots « image » et « antécédent » dans des phrases.

Enfin, dans un autre exercice, il a introduit une expression algébrique pour faire calculer des images de certaines valeurs. : *g est définie sur IR par* $g(x) = 2x^2 - 1$ . Après avoir demandé de calculer $g(0)$ et $g(-5)$, il a demandé aux élèves de remplir le tableau de valeurs suivant; ce que les élèves ont commencé de faire. La première séance se termine ainsi.

| *x* | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *g(x)* | | | | | | | | | |

Dans cette séance, le professeur a fait travailler les élèves dans différents registres (graphique, algébrique, tableau de valeurs) sans le préciser explicitement aux élèves et sans en privilégier aucun. Il s'est essentiellement appuyé sur les connaissances antérieures des élèves sur les objets relevant de ces trois registres sans revenir dessus. Or les élèves n'ont vu, en classe de 3$^{ème}$, que des fonctions affines (donc seulement des droites comme représentations graphiques, des expressions du type y = ax +b et des tableaux de valeurs ne comportant que quelques couples de valeurs).

Notons que ce tableau de valeurs, conforme à la pratique habituelle à ce niveau d'enseignement (d'après notre analyse de manuels), a été introduit par le professeur sans qu'il questionne les élèves sur leur habitude d'un tel mode de représentation comme si cela allait de soi. On voit donc ici, conformément à nos analyses, que le tableau de valeurs est considéré par les enseignants comme un objet non problématique.

# II. Deuxième séance : expérimentation de l'activité 1

## II.1 Introduction

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, cette activité a été faite pendant la deuxième séance en module (deux temps d'une heure concernant chacun une demi-classe). Pour chaque demi-classe nous avons constitué 3 groupes, divisés en deux demi-groupes « émetteur » et « récepteur ». Pendant que les demi-groupes émetteurs (respectivement récepteurs) étaient au travail sur l'activité 1, nous avons fait travailler les demi-groupes récepteurs (respectivement émetteurs), sur une autre activité dite « Activité 1bis » dont nous parlerons à la fin de l'analyse de l'activité 1.

A chacune des deux séances, nous avons filmé, 2 des 3 groupes et enregistré sur cassette audio l'autre groupe qui était observé. Nous disposons donc de 4 films et de 2 enregistrements audio ainsi que des copies des élèves. Voici notre analyse à partir de ces données en commençant par les groupes émetteurs :

## II.2 Analyse a posteriori de l'activité 1

### II.2.1 Groupes Emetteurs

***Discussion sur le repère et le quadrillage***

Chaque groupe a, plus au moins, discuté sur le repère et le quadrillage en se demandant comment ils pourraient en rendre compte au groupe récepteur. Nous n'avions pas prévu ce genre de débat. Par ailleurs, nous avions omis de signifier aux groupes émetteurs, que leurs camarades des groupes récepteurs allaient disposer de feuille avec le repère tracé. Comme nous n'avions pas non plus discuté de cet aspect avec l'enseignant, celui-ci ne s'est pas senti le droit de répondre, dans un premier temps, aux élèves qui lui ont posé la question. Ainsi il y a eu un certain parasitage, que nous n'avions pas prévu et qui a occupé plus ou moins certains groupes dans les débuts de la discussion, voire s'est retrouvé dans les messages où certains groupes ont commencé par une description du repère.

Toutefois, ces discussions nous permettent de voir que les élèves ne voient pas l'universalité de la représentation, puisque si l'on veut représenter une courbe, on pourrait imaginer que même si le groupe récepteur n'utilise pas le même repère, ce serait toujours la même courbe. Nous pensons que c'est un indice du fait que les élèves conçoivent avant tout la courbe comme un dessin indépendant de son caractère représentatif de l'objet fonction.

***Les types d'information donnés par les élèves***

Quatre de six groupes ont produit un tableau de valeurs sans donner d'autres informations. Les deux autres groupes ont donné des points de la courbe en ajoutant chacun une phrase qui donne une précision sur la forme de la courbe (« *tracez cette courbe à la main sans faire de droite* » et « *le résultat final devra ressembler à une courbe non régulière* »).

Voici la réponse de groupe 4 :

Tout d'abord, le résultat final devra ressembler à une courbe non régulière.
Le repère a pour abcisse x et pour ordonnée y.
Alors un premier points [-4 ; 2] ; un autre points [-3 ; 1,5] ;
un points [-2,5 ; 0,5] ; un points [-1 ; 2] ; ensuite un
points [-0,5 ; -0,5] ; un points [0,5 ; 0,5] ; un point [1 ; 1],
et [1,5 ; 1,5], ensuite [2,5-1], puis le points final
[4 ; 0,5]

On peut considérer que pratiquement tous les groupes utilisent la stratégie « point par point » et on ne trouve donc, dans leurs messages, aucun indice d'allusion à la courbe en tant que globalité.

Aucune information n'est donnée sur les variations de la fonction par les élèves. Dans notre analyse a priori, nous avions envisagé que les élèves pourraient dire « ça monte, ça descend, ça ressemble à une montagne,… », dans le registre de la langue naturelle pour essayer de donner des explications sur les variations de la fonction, en sachant qu'ils ne connaissent pas le vocabulaire adapté de fonction croissante ou décroissante. Au vu des résultats, il semble donc que les élèves ne voient pas les variations comme quelque chose d'important en tant qu'informations sur la courbe. Donc, en début d'apprentissage sur les fonctions, les variations ne s'imposent pas comme un critère de description.

Il n'y a pas, non plus, contrairement à ce que nous avions envisagé, de tracé d'un programme de construction (par exemple : « *Commencez par le point (-4 ; 2), puis allez jusqu'au point (-2.5 ; 0.5) en passant par le point (-3 ; 1.5) …* ») dans leurs messages.

***Utilisation massive du tableau de valeurs au sein des groupes***

Après la discussion sur le repère et le quadrillage, nous avons pu constater que la plupart des élèves proposaient de faire un tableau de valeurs. Ainsi, nous détaillons pour chaque groupe comment apparaît l'idée de donner un tableau de valeurs ou simplement des coordonnées (sans utiliser la forme du tableau).

*Groupe 1 (binôme d'élèves, E1 et E2)*

13. E1 : **C'est facile on fait un tableau** (dès qu'ils ont lu l'énoncé de l'activité)
14. E2 : Non on fait pas on fait …
15. E1 : Toutes les informations on fait un tableau, du coup !
16. E2 : Mais déjà elle part à gauche -4 à 2

…

19. E1 : Monsieur ? On peut faire un tableau ?
21. P : Tu as déjà entendu tu peux faire ce que tu veux sauf une courbe !

…

31. E2 : Ben moi j'ai pas envie de faire comme ça en fait !
32. E1 : Tu veux faire quoi, toi ?
33. E2 : Je veux faire par exemple la courbe elle arrive elle apparaît déjà -4 et 2 (il montre ce point sur la courbe))
34. E1 : Mais attends ! C'est trop facile quand on fait un tableau. On fait les points et après on les relie (il montre aussi sur la courbe !)

…

38. E1 : Au lieu d'écrire le 4 il va au truc je mets un tableau tranquille !

E1 envisage tout de suite de donner un tableau de valeurs sans vraiment observer la courbe qui lui a été donnée. On ne sait pas exactement pourquoi il a choisi le tableau de valeurs parmi « toutes les informations ». D'autre part, il dit « on fait les points et après on les relie » (ligne 34), ce qui montre qu'il a bien l'idée qu'une courbe se trace à partir de différents points donc d'un tableau de valeurs.

Par contre E2 a tendance à donner des phrases qui commence par « *la courbe elle apparaît* *déjà -4 et 2* » et qui traduisent plus l'idée d'un programme de construction, mais il n'arrive pas à donner d'autres phrases qui pourrait être des précisions sur les variations de la fonction, puisque E1 impose un tableau de valeurs, de façon tellement forte que E2 abandonne et accepte de ne donner qu'un tableau de valeurs.

*Groupe 2 (binôme d'élèves, E1 et E2)*

1. **E1 : On a droit de faire un tableau ?** (dès qu'ils ont lu l'énoncé de l'activité)
2. E2 : Non non justement !
3. E1 : On n'a pas droit de faire un tableau ?
4. E2 : Non c'est un paragraphe rédigé. Tu dit -4 abscisse correspond -2 ordonné de y
5. E1 : (Rire) fais un tableau !
6. E2 : Mais non ils ont hé…
7. E1 : On a droit de faire un tableau, Monsieur ?
8. Ob : Tout ce que vous voulez sauf une courbe
9. E1 : Bon
10. E2 : Ben d'accord ben voilà (ensuite E1 commence à construire un tableau)

E1 demande tout de suite si on a droit de donner un tableau de valeurs sans rien dire sur la courbe qui lui a été donnée ni même regarder la courbe. On peut penser qu'il considère qu'un tableau de valeurs comporte toutes les informations qu'on peut écrire par des phrases (ligne 5).

Au début, E2 a tendance à vouloir donner « un paragraphe rédigé », quand il a appris qu'on a droit de donner un tableau de valeurs, il tombe d'accord, sans hésitation, pour donner un tableau de valeurs et c'est même lui qui commence tout de suite à construire un tableau de valeurs. Nous pouvons donc supposer que le paragraphe qu'il voulait construire n'aurait comporté que la traduction d'un tableau de valeurs en langue naturelle. On peur penser que, s'il voulait mettre d'autres informations qu'un tableau de valeurs, il n'aurait sûrement pas accepté l'idée aussi rapidement.

*Groupe 3 (binôme d'élèves, E1 et E2)*

4. E1 : Voilà déjà le premier point **on va faire point par point** …premier point… (après avoir lu l'énoncé de l'activité et après avoir observé la courbe donnée)

…

54. E1 : C'est bon à peu près mais quand on a plein de points comme ça on les met ici, il y a une façon particulière de les écrire ?
55. P : Tu peux les écrire comme tu veux
56. E1 : Ah bon on va écrire comme ça alors

Ce groupe a donné des points sans les présenter dans un tableau de valeurs. Néanmoins, cette réponse n'est guère différente d'un tableau de valeurs, c'est bien une stratégie « point par point » (ligne 4), ces élèves semblent ne pas avoir donné un tableau, simplement parce qu'ils n'en ont pas encore l'habitude. La preuve en est leur interrogation (ligne 54) sur une façon particulière d'écrire les points qu'ils ont choisis.

*Groupe 4 (binôme d'élèves, E1 et E2)*

3. E2 : En fait il faut dire des trucs sur la courbe
4. E1 : Ouais j'ai rien compris ... Ah oui **il faut donner des coordonnées** si (…)

…

11. E1 : Mais euh.Tout simplement par exemple je peux le dire le point…-4…

…

16. E1 : Alors tu va faire tracer une courbe qui n'est pas régulière déjà et elle part le point -4et 2
17. E2 : En fait, il faut donner à ce moment là, à ce moment là, à ce moment là, à ce moment là (…)
18. E1 : Non en fait à ce moment-là on va pas (…)

Ils donnent immédiatement des coordonnées sans discuter sur la courbe ou sur d'autres informations qu'on pourrait donner. Comme nous l'avons dit pour le groupe 3, ils utilisent la stratégie « point par point » (ligne 4) et on peut considérer ainsi qu'ils ont donné un tableau de valeurs.

*Groupe 5 et 6 (Triplets d'élèves)*

Il s'agit des deux groupes pour lesquels, nous ne disposons que d'un enregistrement audio. Ils ont tous les deux donné un tableau de valeurs sans autre information. Mais malheureusement les cassettes des enregistrements sont incompréhensibles. C'est pourquoi nous ne savons pas leur point de départ pour construire un tableau de valeurs.

***Mise en place des différentes stratégies par les groupes***

Pour déterminer la stratégie que les élèves utilisent, nous avons découpé leurs dialogues en étapes. Chaque étape nous donne des indices, soit sur la stratégie utilisé (s'il y a une seule étape), soit sur le changement de la stratégie (s'il y a plusieurs étapes).

*Groupe 1 (binôme d'élèves, E1 et E2)*

| Etapes | Conversations | Stratégies utilisées |
|---|---|---|
| **Etape 1** | *Discussion sur le point (2 ; 1.25) qui n'est pas un point du quadrillage (après avoir mis 3 premiers points du quadrillage) :*<br>53. E2 : Après on dit… non là c'est ici donc ça fait…<br>54. E1 : Non -2 ça nous fait combien, -2 ?<br>55. E2 : Non je pense que là **ce trait est à peu près droit** (*il parle la partie de la courbe sur [-2.5; -1]*) Ouais bof j'sais pas !<br>56. E1 : Il faut **plusieurs points** pour… il faut au moins trois points pour relier…<br>57. E2 : Mais là ils sont difficiles à percer (*il parle du point (-2 ; …)*) alors celui-là est beaucoup plus facile à percer ce point-là (*il parle du point (-1 ; 2)*) | E1 : tableau maximum (quadrillage + abscisse entière)<br><br>E2 : tableau extrema |
| **Etape 2** | *Discussion sur le point (1 ; 1) qui n'est pas un point du quadrillage (après avoir pris les points (-1 ; 2), (-0.5 ; -1) et (0.5 ; 0.5)) :*<br>70. E2 : 1 et 1<br>71. E1 : Non c'est pas 1 celui-là (*il parle de la valeur pour x=1*)<br>72. E2 : 1 et 1<br>73. E1 : Non c'est pas totalement 1 celui-là<br>74. E2 : Ouais mais à peu près **il a dit le plus ressemblant. Il vaut mieux mettre directement ça parce que ça suit à peu prés la même droite** (*il parle la partie de la courbe sur [0.5 ; 1.5]*) | E2 : tableau quadrillage (avec les points où il y a beaucoup distance ou un changement de concavité de la fonction) |
| **Etape 3** | *Discussion sur le point (2 ; 1.25) qui n'est pas un point du quadrillage (après avoir mis le point (1.5 ; 1.5) sans discussion) :*<br>80. E2 : Ensuite 2.5 et 1<br>81. E1 : Mais non y a celui là (il parle du point (2 ; …))<br>82. E2 : Mais non on s'en fout de celui là<br>83. E1 : Non parce que…<br>84. E2 : **Parce que ça suit si on fait ça lui trace alors… passe aussi par là donc c'est obligé**<br>85. E1 : Si on ne mets pas ce point-là ils vont directement comme ça<br>86. E2 : Oui vite fait ouais c'est la même chose à peu près<br>87. E1 : **On s'en fout, y a des places** (il l'ajoute dans le tableau)<br>*(Ensuite Ils ont mis d'accord, sans discussion, sur les points (2.5 ; 1) et (4 ; 0.5) qui sont des points du quadrillage / d'extrema)* | E1 : tableau maximum (quadrillage + abscisse entière)<br><br>E2 : tableau extrema |

E1 veut utiliser la stratégie « tableau maximum », c'est-à-dire les points du quadrillage renforcé par les points d'abscisses entières, c'est lui qui l'emporte et ce sera la réponse du binôme sous forme de tableau.

Par contre E2 veut n'utiliser que les points correspondant aux extrema, c'est-à-dire la stratégie « extrema tableau» (étape 1), ensuite quand il y a beaucoup de distance entre deux points extrema ou un changement de concavité, il passe alors la stratégie « quadrillage » (étape 2).

Ensuite il revient la stratégie « extrema » puisqu'il n'y a pas beaucoup de distance ni de changement de concavité (étape 3). En plus, il a l'idée d'approcher la courbe par des segments de droite.

De même, à la fin de séance, quand E1 commence à recopier le tableau de valeurs sur le transparent, il demande à E2 de compter combien de points ils ont mis dans le tableau au brouillon. E2 compte 12 points et indique pour lui (silencieusement) « normalement 8 points normalement ». Nous interprétons cela comme un renforcement de la stratégie extrema avec 2 points supplémentaires.

94. E1 : Compte ! Combien y a de trucs ?
95. E2 : Alors…12 points (il compte les valeurs du tableau qu'ils ont mis sur le brouillon)
Puis E2 recommence à compter les points sur la courbe puis il a dit pour lui-même
« **normalement 8 points normalement** »

*Groupe 2 (binôme d'élèves, E1 et E2)*

| Etapes | Discussions | La stratégie utilisée |
|---|---|---|
| Etape 1 | *Après avoir construit un tableau de valeurs « vide » :*<br>11. E2 : Tu mets -4 dans les points des x et pour y c'est 2<br>12. E1 : **Après… -3.5**<br>13. E2 : -3.5 correspond… on vérifie tous les chaque points (**Il parle des valeurs entières et la montre par un geste**) on fait tous les chaque points après on relie la courbe<br>14. E1 : Ils vont faire comme ça (elle montre sur la courbe que sur [-4 ; -2.5] si on précise pas le point pour x=-3.5 les autres peuvent tracer différemment !)<br>15. E2 : Non non il y a une troisième point là qui est là (il parle le point (-3 ; 1.5)) ils vont relier ainsi !<br>(**E2 commence à mettre toutes les valeurs d'abscisses entières dans le tableau de valeurs, sans observer la courbe**) | E1 : tableau maximum (avec les points d'abscisses demi-entières)<br><br>E2 : tableau entier |
| Etape 2 | *Après avoir mis les points (-4 ; 2), (-3 ; 1.5), (-2 ; 1.25), (-1 ; 2) sans discussion :*<br>26. E1 : Après 0<br>27. E2 : Putain y a celui-là aussi…c'est -0.5<br>…<br>32. E1 : 0.5<br>33. E2 : Non -0.5<br>34. E1 : Mais on n'a pas mis -0.5 dans le tableau<br>35. E2 : C'est pas grave c'est un brouillon refais !<br>36. E2 : Tu mets -0.5 c'est pareil (pour x = -0.5)<br>(E1 ajoute le point (-0.5 ; -0.5) entre -1 et 0 de x dans le tableau de valeurs) | E2 est resté dominant du début à la fin et il impose d'utiliser la stratégie « tableau entier » |

E2 impose d'utiliser, dès le début, la stratégie « tableau entier » à son camarade et ce, sans vraiment regarder la courbe. Ainsi il construit un tableau de valeurs ne comportant que des valeurs d'abscisses entières, puis ils ont commencé à remplir ce tableau en regardant la courbe donnée.

E1 a au début tendance à donner toutes les valeurs d'abscisses entières et demi-entières (ligne 12) mais E2 est resté dominant du début à la fin et donc E1 n'a fait qu'écrire ce que E2 a imposé.

E2 est donc guidé par une connaissance (intuitive ou venant d'expériences faites dans d'autres disciplines, par exemple au collège comme géographie, biologie, physique, etc) de ce qu'est un tableau de valeurs et il le remplit en lisant sur la courbe avant même de se poser des questions sur la nature de la courbe. C'est-à-dire qu'il n'observe pas vraiment la courbe donnée et notamment ses variations.

Nous avions pourtant prévu que cette stratégie « tableau abscisse entière » serait mise en défaut par les élèves, puisqu'il y a beaucoup d'abscisses entières qui ont des ordonnées compliquées et que, de plus, cette stratégie n'est pas valide en tant que conception sur la nature de la courbe. Il est très intéressant d'observer que cet élève insiste, jusqu'à la fin de séance, pour utiliser cette stratégie et il résiste malgré la difficulté que nous avons mise en évidence. Cela prouve la différence avec la stratégie quadrillage. C'est vraiment les abscisses entières qui guident la démarche indépendamment des valeurs des ordonnées.

Nous pensons que cet élève est dans le registre numérique et qu'il n'est pas sorti du modèle des entiers. Il y a une prégnance très forte des valeurs entières pour lui et c'est comme si ce qui est en dehors des entiers c'est un peu supplémentaire, mais ce n'est pas essentiel.

Par contre, à un moment donné, E2 dit qu'il y a ce point (-0.5 ; -0.5). Nous pensons que c'est un point qui lui apparaît comme facile à donner. On ne sait pas pourquoi il a mis ce point, alors qu'il y a d'autres points qui sont tout autant faciles à lire. C'est donc le seul point qu'ils ont mis dans le tableau en plus des points d'abscisses entières. Ils ont inversé aussi le point (0.25 ; 0) au lieu du point (0 ; …) sans faire attention, pourtant ils avaient bien mis le point pour x = 0 dans le tableau de valeurs construit au brouillon.

Ils ne se sont jamais interrogés sur la fiabilité de leurs informations pour le tracé de la courbe par le groupe récepteur.

*Groupe 3 (binôme d'élèves, E1 et E2)*

| Etapes | Conversations | Stratégie utilisée |
|---|---|---|
| Etape 1 | *Ils ont choisi les 4 premiers extrema sans discussion (sans prendre le point (-3 ; 1,5) où il y a un croisement exact avec le quadrillage) : (-4 ; 2), (-2,5 ; 0,5), (-1 ; 2) et (0,5 ;-0,5)* | E1 et E2 : extrema simple |
| Etape 2 | 16. E2 : Ensuite euh 1.5 euh 1.5<br>17. E1 : Ça...(*il montre le point (0.5 ; 0.5)*)<br>18. E2 : Non celle là (*il montre le point (1.5 ; 1.5)*) | E1 : extrema simple<br>E2 : quadrillage simple |
| Etape 3 | 19. E1 : Disons (0.5 ; 0.5)<br>20. E2 : Ouais<br>21. E2 : Ensuite euh (1 ; 1)<br>22. E1 : Non (1.5 ; 1.5) (il l'a écrit)<br>23. E2 : Hein ! ensuite (2.5 ; 1) | E1 : quadrillage simple<br>E2 : quadrillage simple |
| Etape 4 | *Après avoir tracé une courbe à partir de ces points :*<br>32. E1 : A part de ce côté (*il parle de la courbe qu'il vient de tracer sur [-4 ; -1]*) le reste c'est à peu près la même<br>33. E2 : Ben on peut pas mettre des points…mettre chaque point.<br>34. E1 : On dirait… **là là (*Il montre le point (-3 ; 1.5)*)**<br>35. E2 : **Là voilà (*ils se localisent sur le point (-3 ; 1.5)*)**<br>36. E1 : **Voilà on l'a oublié là donc** ça fait…-3 et 1.5<br>…<br>43. E1 : Ça on a donné là des coordonnés ça passe sur **des nœuds** mais là disons que si on fait ça on voit pas là **tiré noir**. On a dessiné comme ça parce que on a donné ce point, ce point, ce point… essaie de faire comme ça | E1 et E2 :<br>Quadrillage simple |

Ils commencent par écrire les quatre premiers extrema de la fonction sans discussion. Nous pensons qu'ils utilisent, pour ces quatre points, la stratégie « extrema simple », et pas la stratégie « quadrillage simple », puisqu'ils n'ont pas pris en compte le point (-3 ; 1.5) où il y a un croisement exact avec le quadrillage (étape 1).

E2 veut continuer à utiliser la stratégie « extrema simple » pour la suivante mais E1 veut mettre le point (0.5 ; 0.5) qui n'est pas un point d'extremum de la fonction (étape 2). Ils se sont mis d'accord sur ce point-là. Nous pensons que cela est lié au fait que, comme dans la plupart des groupes, à partir de ce point il y a un changement de la concavité de la fonction ou bien que les deux extrema pour x = -0.5 et x = 1.5 sont trop éloignés et ainsi Ils ont besoin d'un point intermédiaire pour qu'il n'y ait pas d'ambiguïté sur la tracé de leurs camarades.

On observe ainsi un basculement vers la stratégie mixte qui est la stratégie « extrema simple » renforcé par la stratégie « quadrillage simple » (étape 3).

Ensuite E1 fait une anticipation de ce que le groupe récepteur va faire et il trace une courbe « simple lisse » à partir des points qu'ils ont choisis. A partir de la vérification de la courbe, ils basculent totalement vers la stratégie « quadrillage simple» en ajoutant le point (-3 ; 1.5) et en disant « ça passe sur **des nœuds**… » (Ligne 43) (étape 4)

Enfin, à la fin de leur message, ils ont ajouté « *Tracez cette courbe à la main sans faire de droite »*, donc ils ont voulu empêcher l'utilisation de la stratégie « courbe simple rectiligne » par le groupe récepteur.

Ils n'ont pas utilisé une forme spéciale pour présenter les points qu'ils ont choisis (par exemple un tableau de valeurs) comme information sur la courbe. Pourtant ils voulaient quand même utiliser une présentation spéciale pour ces points-là. Ceci nous montre qu'ils n'ont pas l'habitude de ce type de présentation :

> E1 : C'est bon à peu près mais quand on a plein des points comme ça on les met ici, il y a une façon particulière de les écrire ?
> P : Tu peux les écrire comme tu veux
> E1 : Ah bon on va écrire comme ça alors

En effet, on voit ici au moins deux phénomènes importants et particuliers à ce groupe :

- L'anticipation de ce qui sera fait par le groupe récepteur.
- Un souci de présentation (ou codifier) des données.

*Groupe 4 (binôme d'élèves, E1 et E2)*

| Etapes | Conversations | Stratégies utilisées |
|---|---|---|
| **Etape1** | 16. E1 : Alors tu vas faire tracer une courbe qui n'est pas régulière déjà et elle part du point -4 et 2<br>17. E2 : En fait il faut donner **à ce moment là, à ce moment là, à ce moment là, à ce moment là** (***il suit les droites perpendiculaires du repère, ce qui fait que les valeurs demi-entières de x***)<br>18. E1 : Non en fait à ce moment là on va pas (il parle le point x = -3.5 où y a pas de croisement exact !!!). Il faut dire directement tu vas là en fait il faut dire ce point-là et ce point-là (***il parle des points qui peuvent être reliés facilement sur le repère***)<br>19. E2 : Ben non réfléchis si tu dis ce point-là et ce point-là, il va faire quoi ? Il va faire ça (*il montre une droite avec son crayon*)<br>20. E1 : Mais t'as aucun indication regarde ça, ça veux dire que, ça ? (*il montre un point qui n'est pas précis !*)<br>21. E2 : Mais non, dit à peu près !<br>22. E1 : Mais non tu lui dis il faut faire une courbe il faut que le tiré est toujours arrondi… en fait…euh tu lui dis… on dit qu'il faut d'abord, tracer les points, les points c'est ce point-là, ce point-là, ce point-là…(*les points où soit la fonction change de sens, soit les points bien précis c'est un commentaire de toi ? Si oui à mettre dans l'autre colonne)*) et puis après tu vois là tu fais tout ça euh fais que des point de courbe. | E1 : quadrillage simple<br><br>E2 : les points d'abscisses demi-entières |

E1 veut utiliser les points d'extrema de la fonction, stratégie « extrema simple », et pour lui, une courbe est toujours « arrondie » (ligne 22) et il considère qu'on trace une courbe la plus lisse possible, mais pas avec des segments de droite. En conséquence, il préfère utiliser la stratégie « extrema simple ». Par contre E2 veut utiliser tous les points d'abscisses demi-entières donc il veut mettre le maximum de points.

Quand ils ont commencé à écrire les points, E1 ne prête pas beaucoup attention au choix des points et il se dépêche pour finir le message, puisqu'ils ont perdu beaucoup du temps sur la discussion du quadrillage et du repère. C'est donc E2 qui choisit les points et les dicte à E1 en utilisant la stratégie « quadrillage simple ». Il utilise l'expression « ça monte… » sur certains intervalles où il n'y a pas beaucoup de concavité et non plus de distance.

*Groupes 5 et 6*

Ces deux groupes n'ont donné chacun qu'un tableau de valeurs. Comme nous l'avons dit ci-dessus, l'enregistrement ne nous permet pas comprendre ce qu'ils ont dit pendant qu'ils construisent le tableau de valeurs. D'après leurs feuilles de message ;

Le groupe 5 n'a pris en compte que les points où il y a un croisement exact avec le quadrillage. On peut donc dire qu'ils utilisent la stratégie « quadrillage tableau ».

Le groupe 6 commence d'abord par un tableau de valeurs avec les abscisses entières au brouillon, ensuite ils abandonnent et finalement ils prennent en compte les points d'extrema de la fonction sur le transparent. Ils basculent donc de la stratégie « tableau abscisses entières » vers la stratégie « tableau extrema ».

***Discussion sur la validité de leurs réponses et anticipation de ce que le groupe récepteur peut faire***

Nous avons constaté, en analysant les dialogues, qu'aucun élève n'a évoqué la non précision de leurs informations. On peut penser qu'ils ont encore des difficultés à repérer les points et donc ils ne peuvent pas les prendre en compte pour que les groupes récepteurs arrivent à tracer la même courbe ou bien il y a une illusion des élèves sur le fait que le tableau de valeurs va suffire, pour eux le tableau de valeurs est un moyen de bien rendre compte de la courbe. Ceci nous montre que pour les élèves la non correspondance entre le registre graphique et le registre tableau de valeurs n'est pas problématisée, ce qui confirme l'analyse des réponses des élèves dans notre questionnaire. Les élèves n'ont pas donc discuté sur la validité de leurs réponses.

D'autre part, seul un groupe a anticipé de ce que le groupe récepteur peut faire. En effet, cet groupe (groupe 3) essaie explicitement de tracer la courbe à partir des points qu'ils ont donnés pour voir si ça marche ou pas. Ils tracent ainsi une courbe « simple lisse » et ils constatent que sur certains intervalles la courbe est différente de la courbe originale. Ils commencent ainsi à chercher des informations supplémentaires à donner pour que les deux courbes soient identiques. Cependant, ils ne songent qu'à donner d'autres points. Les autres groupes ont traité cette tâche comme une conversion du registre graphique au registre tableau de valeurs.

Pour certains il s'agissait même d'une tâche de lecture des ordonnées des points d'abscisses entières.

***Les raisons de l'apparition massive du tableau de valeurs !***

Nous pensons tout d'abord que les élèves ne se sont pas autorisés à utiliser des phrases de type « ça monte, ça descend,… » qui ne sont pas conforme au vocabulaire mathématique usuel.

D'autre part, nous pensons que les élèves considèrent que le tableau de valeurs est plus économique et plus facile à donner que d'autres informations (comme un paragraphe rédigé) et donc ils peuvent considérer que le tableau de valeurs est une information plus conforme dans un cours de mathématiques. Cela vient peut-être des habitudes de ce qui ce fait en mathématiques en général et ce qui ne se fait pas.

Ensuite nous avons bien senti que certains élèves ont déjà l'habitude de tracer une courbe à partir d'un tableau de valeurs. Ceci nous montre que le tableau de valeurs est un objet familier à ce niveau pour les élèves. Nous faisons l'hypothèse que cette familiarité vient de la culture des années antérieures, puisqu'ils sont au début de leur apprentissage sur la fonction. En plus, comme nous l'avons dit pour la première séance, le professeur était neutre au niveau des registres de représentation de la fonction et nous pensons donc que la première séance n'a eu aucune influence sur l'apparition massive du tableau de valeurs. D'ailleurs, quand nous avons fait un entretien avec le professeur, après avoir fait l'expérimentation, nous lui avons demandé pourquoi à son avis le tableau de valeurs était apparu aussi massivement, il nous a répondu que cela pouvait venir soit de la pratique de la troisième soit de la physique où ils font beaucoup d'échantillonnage.

***Les informations qui sont données en dehors d'un tableau de valeurs ou des coordonnées***

Comme nous l'avons dit ci-dessous, seuls 2 groupes ont ajouté chacun une phrase après avoir donné des coordonnés. Il s'agit de « *tracez cette courbe à la main sans faire de droite* » et « *le résultat final devra ressembler à une courbe non régulière* ». Ces deux phrases ont pour but d'empêcher l'utilisation de la stratégie « courbe rectiligne » par les groupes récepteurs.

Les autres 4 groupes n'ont donné qu'un tableau de valeurs. Ils ne jugent donc pas utile d'ajouter d'autres informations notamment en langue naturelle. Nous pouvons expliquer cela par le fait que mélanger deux registres dans la même information ne semble pas être évident pour les élèves. Naturellement, une fois qu'ils sont dans le registre tableau de valeurs, ils peuvent avoir du mal à en sortir et à comprendre qu'il faut donner différents points de vue sur le même objet.

***Les arguments sur les extrema et sur les variations***

Pratiquement nous n'avons rien trouvé comme argument sur les variations de la fonction sauf une fois dans le groupe 4, l'élève a utilisé deux fois l'expression « ça monte » où les deux extrema de la fonction sont rapprochés l'un à l'autre et il n'y a pas de changement de concavité de la fonction.

Comme nous l'avons vu dans la mise en place des tableaux de valeurs, certains élèves utilisent bien la stratégie « extrema » mais sans utiliser des arguments explicites.

***Les informations tirées de la courbe***

Nous avions voulu voir, en faisant cette activité, les conceptions des élèves sur le registre graphique, et donc quels sont les moyens verbaux de description ? Quels sont les descripteurs possibles pour les élèves sur ce registre ? Comment ils le percevaient dans la relation avec la représentation de fonction ?

Nous avons constaté que, pour les élèves, ce qui est prédominant c'est un tracé point par point avec les points du quadrillage. Les points caractéristiques qui sont donnés le sont essentiellement par rapport à la facilité de lecture des coordonnés, mais pas par rapport à la forme de la courbe. Il apparaît donc que les élèves se situent avant tout dans le registre graphique, sans faire référence à la représentation d'une fonction. Ils travaillent sur la courbe comme si c'était un dessin dans un quadrillage indépendamment de tout le reste.

Cette activité nous a permis aussi de voir les limites de ce qu'on peut faire en partant de la représentation graphique d'une fonction. On pourrait avoir l'idée que la représentation graphique offre plus de liberté que l'expression algébrique pour faire comprendre certaines notions sur les fonctions. Mais cela n'est pas sûr dans la mesure où les élèves sont encore au début de leur apprentissage.

## II.2.2 Groupes récepteurs

Nous précisons tout d'abord que les groupes récepteurs étaient dans la classe pendant que les groupes émetteurs ont effectué cette activité. Ils ont donc bien entendu la consigne qu'avaient les groupes émetteurs. Ils auraient pu ainsi s'attendre à avoir des informations très ouvertes et très variées, comme nous l'avons précisé dans l'analyse a priori de cette activité. Or, les groupes émetteurs n'ont donné pratiquement que des tableaux de valeurs, et, en retour, aucun groupe récepteur n'a eu l'air étonné d'avoir seulement ce type d'information. Ils auraient pu se dire que leurs camarades n'avaient finalement pas donné grand-chose comme information ou ils auraient pu poser la question de savoir comment arriver à tracer une courbe à partir d'un seul tableau de valeurs ? Mais, nous avons constaté qu'ils ont commencé directement à placer les points donnés sur le repère et cela, sans faire aucun commentaire sur les informations qu'ils ont reçues. Tout se passe donc comme s'ils considéraient le tableau de valeurs comme pertinent par rapport au problème posé. Ceci nous montre que, pour tous les élèves, comme dans le cas des groupes émetteurs, la non-correspondance entre le registre tableau de valeurs et le registre graphique n'est pas encore problématisée.

***Les courbes tracées par des groupes récepteurs***

Nous allons à présent essayer d'analyser les tracés des groupes récepteurs en les mettant en relation avec la production des groupes émetteurs. En effet, ce que les groupes récepteurs ont fait n'est pas indépendant des informations données par les groupes émetteurs.

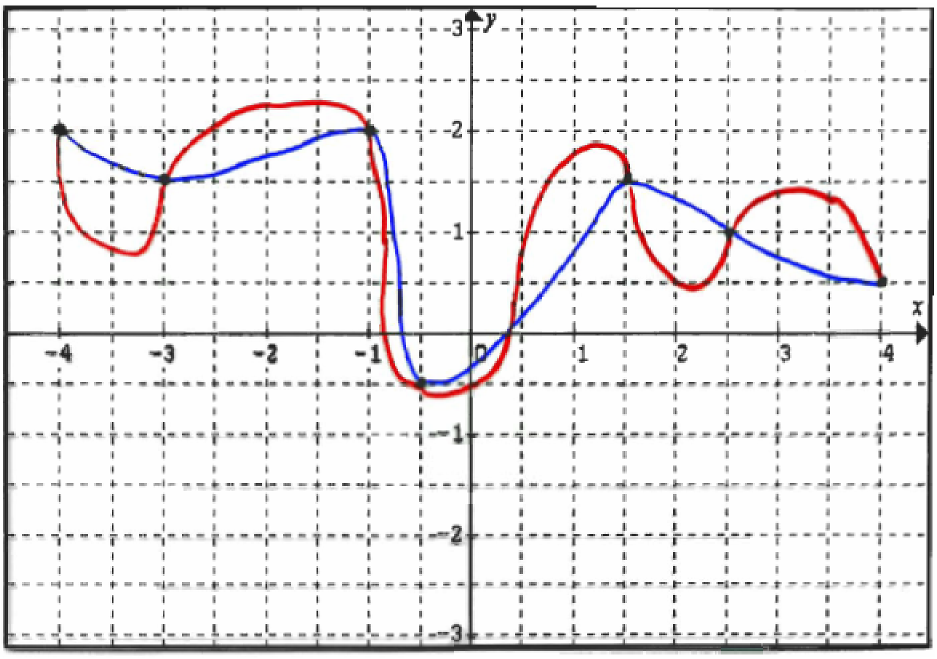
- Ceux qui n'ont reçu qu'un tableau de valeurs :

Parmi les quatre groupes n'ayant reçu qu'un tableau de valeurs, trois tracent une courbe « simple lisse » sur le transparent à partir des points du tableau de valeurs. Un de ces groupes trace deux courbes au brouillon ; une courbe « simple lisse » et une courbe « simple rectiligne », mais ils préfèrent finalement reporter la courbe « simple lisse » sur le transparent en disant « généralement une courbe est plus tordue ». L'autre groupe trace une courbe « simple lisse » et une courbe « libre ». C'est le seul groupe qui trace deux courbes sur le transparent (groupe 5 sur lequel nous étudierons la suivante).

*Le groupe 5 : une courbe « simple lisse » et une courbe « libre »*

Ce groupe a tracé deux courbes : l'une est lisse et l'autre où le sens de variation change entre deux points du tableau, c'est-à-dire que c'est selon les termes de notre analyse a priori, une « courbe libre ».

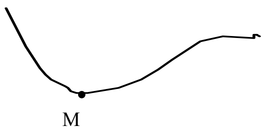
Voici les deux courbes qu'ils ont tracées :



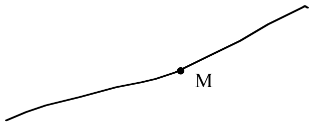

Notons que l'élève (E3) qui trace cette « courbe libre » est un redoublant. Ce même élève montre aussi des idées sur la variation d'une fonction en demandant « *c'est pas un tableau de variations ?* ». Voici un extrait de leur conversation :

> E1 : … oui mais à ce moment là **la** courbe ne passe pas comme ça !
> E2 : oui il est clair…
> E3 : oui comme l'exercice d'avant (*activité 1bis*) où il y avait plusieurs façons de la tracer
> E2 : oui mais bon **y en a une courbe**…
> E3 : j'sais pas. Parce que l'exercice d'avant on l'a bien vu que avec trois points tu peux en tracer plusieurs.
> E1 : mais **la** courbe elle doit passer **sur** les points, pas **par** les points

On voit bien que E3 rattache cette activité à l'activité 1bis. C'est le seul veut ainsi tracer une courbe en introduisant de nouveaux extrema entre deux valeurs du tableau. Les autres élèves (E1 et E2) ne contredisent pas E3, mais elles disent qu'il y a une bonne réponse qui est la courbe simple lisse qu'elles ont tracé et refusent l'idée qu'il puisse y en avoir une autre. En plus, E1 dit « la courbe elle doit passer **sur** les points, pas **par** les points ». Ici le terme « sur » semble vouloir dire que la courbe ne fait pas que passer par le point mais en quelque sorte repose 'dessus', ce qui traduit l'idée de la configuration d'un maximum ou plus généralement d'un extremum.




La courbe passe SUR le point M




La courbe passe PAR le point M

Ainsi cette élève explicite avec son vocabulaire (plutôt du registre topologique que dans le vocabulaire des fonctions) ce qui a l'air d'être implicite chez beaucoup d'autres, et qui revient au fait que les valeurs du tableau sont en général des extrema, avec comme corollaire que ce sont les seuls, qui est une conséquence du principe général du « maximum d'information ».

Ces deux élèves ont donc un présupposé très fort sur le fait que le groupe émetteur a donné le tableau de valeurs le mieux adapté à la courbe, donc c'est « la » courbe « simple lisse » qui doit être « la » bonne réponse, même s'il ne peut y en avoir d'autres qui correspondent à ce tableau. Ainsi même si ces élèves sont capables de tracer plusieurs courbes correspondant à un même tableau de valeurs dans certains contextes (cf. activité 1bis), dans un autre, comme celui-ci, elles sont convaincues qu'il ne doit y avoir qu'une réponse.

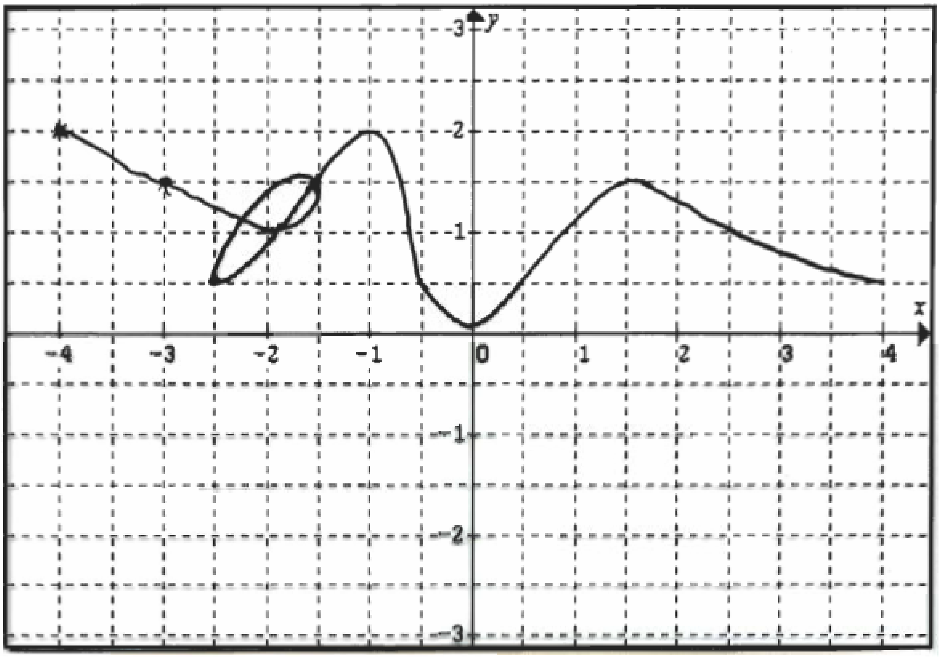
Notons que dans ce groupe, l'opinion de ces deux élèves l'aurait emporté et qu'une seule courbe serait apparue sur le transparent final si l'observateur n'était pas intervenu en disant « si vous n'êtes pas d'accord, vous pouvez mettre plusieurs réponses ». Comme l'observateur nous l'a dit, s'il n'avait pas été là, l'élève (E3) qui avait l'idée de tracer plusieurs courbes, aurait été prêt à se rendre aux arguments des deux autres élèves. Ceci nous prouve que la variabilité de la courbe par rapport à un ensemble de points donnés n'est pas une connaissance que les élèves ont de façon certaine. Cette connaissance partielle reste davantage liée au contexte de la question qu'on leur pose.

- Ceux qui ont reçu des coordonnées et une phrase sur la forme de la courbe

Deux groupes ont reçu des points de la courbe avec une phrase disant qu'il s'agissait de « *tracez cette courbe à la main sans faire de droite* » pour un des groupes ou que « *le résultat final devra ressembler à une courbe non régulière* » pour l'autre.

Ces deux groupes tracent une courbe « simple lisse » sur le transparent à partir des points donnés. Par contre, un de deux groupes fait un « boucle » sur une partie de la courbe, puisque le groupe émetteur a fait une erreur dans l'ordre de l'information. Ce groupe trace donc une courbe qui ne correspond pas à celle d'une fonction.

Voici le tracé de groupe 3 qui a fait un boucle sur une partie de la courbe :



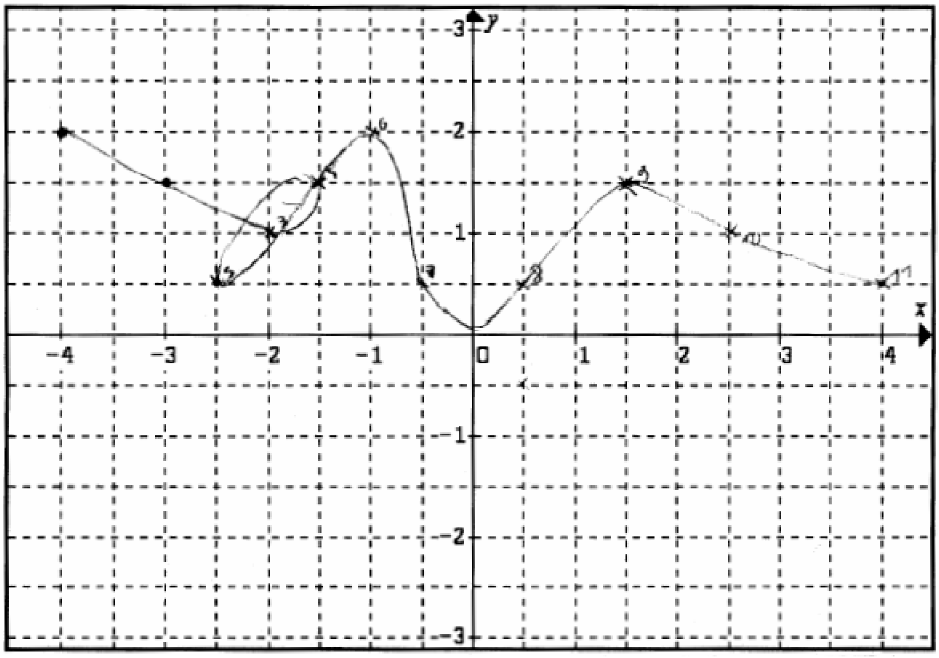

Nous analyserons plus loin les réactions des élèves sur cette boucle et sur les informations données autres qu'un tableau de valeurs (ou des coordonnées).

***Ce que nous avons observé pendant le travail en binômes***

Nous avons bien senti, en écoutant les conversations de cinq groupes (sauf le groupe 5), que les élèves ne sont pas vraiment entrés dans l'esprit du jeu visant à retrouver la même courbe. C'est comme si pour eux la tâche principale, dans cette activité, était de placer les points sur le repère. D'ailleurs, les discussions portaient, la plupart du temps, sur comment décoder le tableau de valeurs en terme de position des points dans le repère. Une fois qu'ils eurent terminé de placer tous les points donnés, ils s'arrêtaient pratiquement de discuter pour tracer une courbe de façon consensuelle et non problématique (courbe simple lisse).

Ceci nous montre que les élèves traitent cette activité comme dans les jeux où l'on reproduit un dessin en reliant des points. Ils pensent ainsi qu'il est très facile de relier les points après les avoir marqués sur le repère. Nous pouvons d'ailleurs observer clairement cela dans le groupe 3, où les élèves numérotent chaque point du tableau sur le repère et suivent ensuite ces numéros pour tracer une courbe « simple lisse ». Ils considèrent donc cette activité comme une activité de conversion pure. Ils ont une technique de tracé graphique qui n'est pas encore liée au cadre des fonctions.

Voici leur feuille de brouillon où ils numérotent chaque point du tableau :




***Les réactions des élèves sur les informations autres que le tableau de valeurs***

Nous rappelons que deux groupes récepteurs ont reçu chacun une phrase. Concernant la première phrase (*tracez cette courbe à la main sans faire de droite*), les élèves n'ont fait aucun commentaire ; ils ont lu cette phrase après avoir placé les points donnés, ensuite ils ont tracé une courbe « simple lisse » sans faire de droite.

Concernant la deuxième phrase (*le résultat final devra ressembler à une courbe non régulière*), un de deux élèves de ce groupe considère une courbe régulière comme celle d'une fonction périodique, sans effectivement utiliser le mot « périodique ». Il montre à son camarade par un geste qu'une courbe régulière reproduit, chaque fois, le même tracé. Pendant la mise en commun, quand le professeur lui a demandé d'expliquer ce qu'est une courbe régulière, il a dit « Ben normalement je pense euh qu'une courbe régulière c'est quelque chose qui suit euh qui est pareil euh qui se répète pareil ». Cet élève a d'ailleurs tracé deux courbes au brouillon (après avoir tracé une courbe « simple lisse » sur le transparent). À la fin, il a éliminé la réponse « courbe régulière », en disant « ah oui on ne peut pas faire comme ça, y a pas de point là. C'est obligé que ça soit comme ça » (il voulait dire que la courbe « libre » ne peut pas être la réponse, puisqu'il y a des nouveaux extrema qui apparaissaient et que leur camarade aurait dû les préciser pour qu'elle soit la réponse).

***Ceux qui font une « boucle » sur une partie de la courbe (groupe 3)***

Un des groupes récepteurs a fait une boucle sur une partie de la courbe, suite à une inversion dans l'ordre des points dans les informations données par leurs camarades.

Voici un extrait de leur conversation :

5. E1 : (*en regardant le message : « passez entre (-2 ; 1) et (-2 ; 1.5) »*) Regarde c'est bizarre que ces deux points ils soient tous les deux là !
6. E2 : Eh ben pourquoi ?

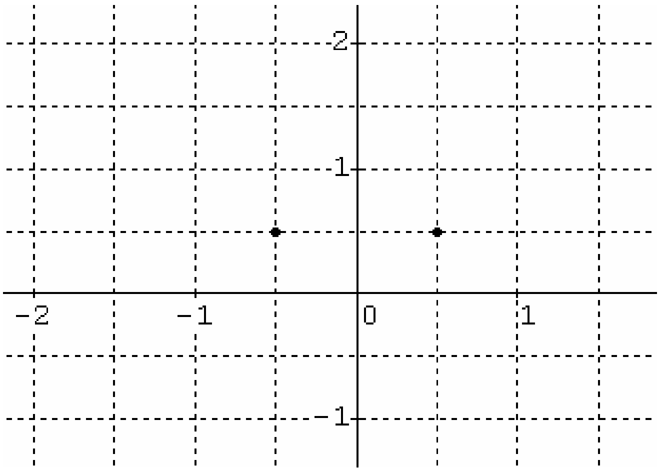
7. E1 : Excuse-moi mais c'est d'un côté et c'est de l'autre côté
8. E2 : Attends y en a d'autres après
9. E1 : Après c'est pas les points
10. E2 : Après… qu'elle passe entre euh… t'as raison ouais
**11.** E1 : **C'est pas nous ils se sont trompés !**
12. E2 : (-2 ; 1) et (-2 ; 1.5)
13. E1 : Je suis sûr que ça doit être là… ben… non
14. E2 : il est où ton point ?
15. E2 : mais on ne voit pas là (*E1 ne marque pas bien ces deux points sur le repère*)
16. E1 : Mais c'est pas des points c'est là où on doit passer.
17. E2 : C'est-à-dire qu'elle passe entre
18. E1 : Mais non, ça passe par ces points par c'est c'est… par là !
19. E2 : Elle passe entre (*il insiste sur le mot « entre »*)
20. E1 : Oui mais elle passe par euh… **ils se sont trompés, ils savent pas écrire**
21. E1 : (…)-2.5 et 0.5 **ça fait l'ordre franchement ça devient n'importe quoi** !
22. E2 : c'est-à-dire la courbe elle fait comme ça **c'est bizarre** (*il montre par un geste…*)
    *Ils placent les autres points sur le repère sans discussion mais E1 numérote chaque point.*
23. E1 : Voilà (*il lit le message* :) tracez cette droite à la main sans faire de droite
24. hum… Là déjà ça va faire (*il suit les points par un geste…*)
25. E2 : Pourquoi ils ont marqué «passez entre » ils pourrait écrire « passez par »
**26.** E1 : **c'est qui les autres !!!**
27. E2 : Oui d'accord attention !
28. E1 : Regarde ça fait comme ça … tac tac tac (*à partir de point (-1 ; 2) il suit les points pour une courbe lisse !*)
**29.** E2 : **C'est bizarre que la courbe elle revienne sur elle-même**
30. E1 : Oui c'est la courbe, ahou ! **ils font n'importe quoi** ! (*il regarde ses camarades du groupe émetteur*)

Ce groupe n'a pas traité les abscisses dans l'ordre croissant, c'est-à-dire qu'ils ont pris les informations dans l'ordre où elles étaient écrites. Au moment où justement l'information va les obliger à revenir en arrière sur des abscisses antérieures, ils ont décidé de faire une boucle. Ils ont conscience qu'une courbe d'une fonction ne doit pas revenir « en arrière », mais ils ont quand même tracé une courbe qui ne correspond pas à celle d'une fonction en disant « *c'est pas notre faute, c'est les autres qui ont fait l'erreur* ».

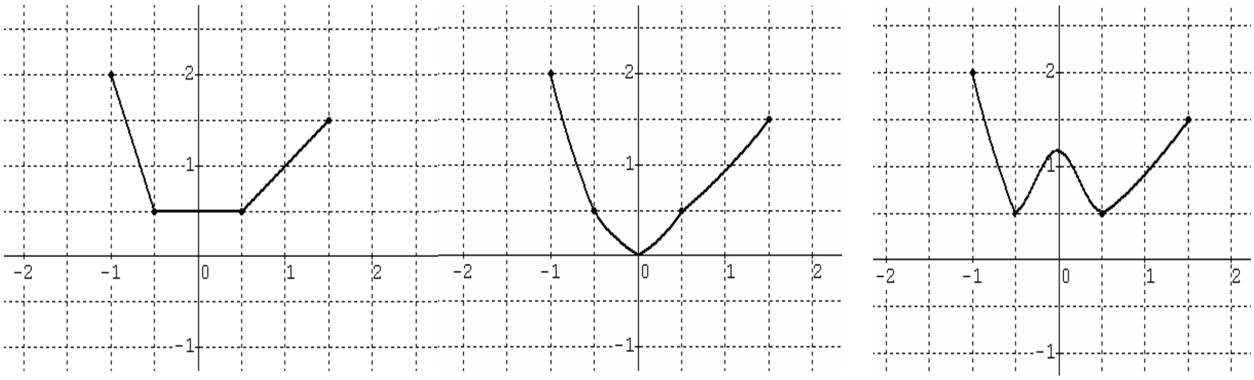
Pendant la mise en commun, ce groupe a continué à insister sur le fait qu'il s'agit de l'erreur du groupe émetteur. Voici un extrait de leur conversation :

53 P : Bon y a un nœud donc on regarde le message (*il le lit*) Le nœud là est-ce que vous pouvez expliquer ?
54 E : **On a suivi ce qui est marqué, on a fait par où elle doit passer et voilà quoi on a tracé**! (*groupe récepteur*)
55 P : Alors ?
56 E : Est-ce que je peux voir la courbe normale pour voir si euh où on a planté ? (*groupe émetteur*)
57 P : Tu veux dire qu'il y a une erreur dans leur message c'est ça que tu es en train de nous dire ?
58 E : Oui
(*Les élèves du groupe émetteur regardent la courbe originale pour vérifier où « ils se sont plantés ?* »)
59 E : … On a mis une ligne de trop en effet !
60 P : Ah ! tu es en train de me dire que vous avez fait une erreur dans votre message
61 E : Oui voilà

Concernant ce groupe, il y a un autre point remarquable. En effet, le groupe émetteur a également commis une erreur de lecture des points sur la courbe qui le conduit à donner les deux points (0,5 ;-0,5) et (0,5 ; 0,5) que le groupe récepteur interprète immédiatement (d'un commun accord implicite sans en discuter) comme (-0,5 ; 0,5) et (0,5 ; 0,5). Ainsi les élèves se retrouvent-ils avec deux points successifs à la même hauteur (ayant même ordonnée) avec de part et d'autre des points plus hauts.




Cette configuration aurait pu leur paraître problématique, en effet on ne peut plus se contenter de prendre les extrema parmi les points tracés, il faut en rajouter au moins un. Il y a trois façons (sans complexifier outre mesure) de compléter la courbe :



première courbe deuxième courbe troisième courbe

La première possibilité qui consiste à faire un 'plat' entre les deux points au même niveau, ne peut être retenue par ce groupe auquel le groupe émetteur a dit explicitement de ne pas faire de droite. Sans hésiter et sans que ce soit discuté ces élèves choisissent la deuxième possibilité, qui ne prend pas les deux points comme des extrema mais correspond aux moindres variations.

***Validité des courbes tracées***

Avant de donner des précisions sur les courbes tracées par les groupes récepteurs, nous récapitulons, dans le tableau suivant, les erreurs des élèves de groupes émetteurs à propos de la lecture de la courbe et les erreurs des élèves de groupes récepteurs à propos du placement des points dans le repère :

| Groupe1 | Emetteurs | Récepteurs | Remarque sur les courbes tracées |
|---|---|---|---|
| **1** | Erreur de lecture d'un extremum<br><br>(x= -0.5) | Erreur du placement d'un extremum<br><br>(x= -1) | Deux extrema ne se trouvent pas au bon endroit<br><br>Il y a de très légers changements dans les autres parties de la courbe tracée |
| **2** | Manque deux extrema<br><br>(stratégie « abscisse entières) | | Deux extrema ne se trouvent pas au bon endroit<br><br>Il y a de légers changements dans les autres parties de la courbe tracée |
| **3** | Erreur dans l'ordre de l'information (une fois)<br><br>Erreur de la lecture d'un extremum (x= -0.5) | Erreur de placement pour un même extremum<br><br>(x= -0.5) | Un extremum ne se trouve pas dans le bon endroit et il y a un nœud sur une partie de la courbe<br>La plupart des parties de la courbe tracée n'est pas compatible avec la courbe initiale |
| **4** | | | Dans la partie où il y a une concavité, il y a des changements.<br>Les autres parties sont plutôt compatibles avec la courbe initiale. |
| **5** | Il manque un extremum<br><br>(x= -2.5) | | Deux courbes :<br>1. Courbe libre : elle change de sens entre deux points successifs<br>2. Courbe lisse : un extremum ne se trouve pas au bon endroit et il y a de très légers changements dans les autres parties |
| **6** | | | Dans les parties où il y a une concavité importante, il y a des inversions de concavité.<br>Les autres parties sont plutôt compatibles avec la courbe initiale. |

Nous voyons que dans 4 groupes il y a au moins un extremum qui ne se trouve pas au bon endroit par rapport à la courbe initiale. Par contre, si les élèves (les émetteurs et les récepteurs) ne font pas d'erreur sur la lecture de la courbe et sur le placement des points dans le repère, ils auraient pu arriver à tracer la même courbe. Nous pouvons observer cela que dans le groupe 4 et 6 où les élèves n'ont pas fait d'erreur, ils arrivent presque à tracer la même courbe. Dans ce cas, on peut dire que la stratégie « point par point » fonctionne très bien (sauf la stratégie « abscisse entière »), il est donc très difficile d'aller contre cette conception. Nous pensons qu'elle peut ensuite poser des problèmes sur la conceptualisation de la notion de fonction et qu'elle risque de créer un obstacle à la construction de l'idée globale de courbe et de fonction.

***Commentaires sur la courbe tracée***

Une fois qu'ils ont tracé une courbe lisse à partir des points donnés, la plupart des groupes sont étonnés par la courbe qu'ils viennent de tracer. Nous expliquons ceci par deux phénomènes : d'une part, la courbe qu'ils ont tracée, qui change plusieurs fois du sens de variation, est hors contrat au niveau de ces élèves qui la rencontrent pour la première fois dans le contexte mathématique. Voici la réaction de quelques élèves :

> « Nooon la courbe de meeerde !»,
> « Alors la courbe euh… ça doit faire ça. Donc c'est pas très euh… »

D'autre part, cela vient du problème du jeu de message, les élèves considèrent que leurs camarades ont fait une erreur dans leurs messages. Voici la réaction de certains élèves :

> « Si c'est faut c'est pas notre faut hé ! »
> « Oui c'est la courbe euh… ils font n'importe quoi »

***Discussion sur la variabilité de la fonction entre deux valeurs***

Nous avons constaté qu'aucun élève (sauf E3 du groupe 5) n'interroge la variabilité de la fonction entre deux valeurs du tableau (ou des coordonnées) pendant qu'ils répondent à l'activité. Ceci semble s'expliquer par le fait que les élèves ont agi comme s'il n'y avait qu'une bonne réponse (effet de contrat) et que, de plus, la stratégie courbe simple lisse s'est imposée. D'autre part, nous pensons que les élèves ne considèrent pas comme important les changements de concavité de la fonction, ce qui est important pour eux c'est de lier les points par des courbes.

***Traitement des implicites des groupes émetteurs***

Nous avons vu que la plupart des groupes émetteurs ont donné les points correspondant aux extrema de la fonction de façon implicite, par des considérations d'ordre topologique. Ils sentent donc qu'ils n'ont pas besoin de dire que ce sont des extrema, parce qu'ils sentent en quelque sorte intuitivement qu'un tableau de valeurs comporte en général les extrema, qui sont des points clefs dans le tracé. Nous pensons que c'est une part de la culture commune, sans que le concept ait été formalisé dans le cadre des fonctions.

Les élèves de groupes récepteurs ont aussi conscience qu'un tableau de valeurs comporte les extrema et si leurs camarades ont donné un tableau de valeurs, les extrema sont parmi les points du tableau de valeurs. Ils n'ont pas dit explicitement que ce sont des extrema mais ils les codent aussi implicitement que les autres ont codé le fait qu'ils ont des extrema.

***L'effet de l'activité 1bis***

Nous rappelons que les élèves des groupes récepteurs avaient travaillé sur l'activité 1bis pendant que les groupes émetteurs étaient au travail sur cette activité.

Dans l'activité 1bis, nous avions voulu faire tracer des courbes toutes différentes à partir de la donnée de trois points « fixes ». Nous voulions ainsi imposer l'idée que les valeurs sur une fonction sont des informations très partielles. Pour cette activité 1bis, tous les élèves sont arrivés à tracer plusieurs courbes (même si certaines ne sont pas des courbes représentatives d'une fonction !).

Quand ils commencent à travailler sur l'activité 1, vu que les groupes émetteurs ont quasiment tous donné un tableau de valeurs, il s'agit pour eux de retrouver une courbe connaissant certains points, c'est donc une tâche très proche de ce qui leur avait été proposé lors de l'activité précédente. Néanmoins, seul un élève (E3 du groupe 5) fait référence à l'activité 1bis et rappelle qu'ils ont tracé plusieurs courbes.

Aucun autre élève n'a parlé de l'activité 1bis, ni a interrogé la variabilité de la fonction entre deux points. Cela montre bien que le contrat change pour les élèves, il est local et le fait qu'ils sont dans une autre situation d'enseignement modifie la règle du jeu.

***Comparaison de l'activité 1 et de l'activité 1bis***

Nous voulons essayer de comparer les réactions de ces élèves face à ces deux activités, puisqu'il s'agit du même type de tâche et que les mêmes élèves les répondent.

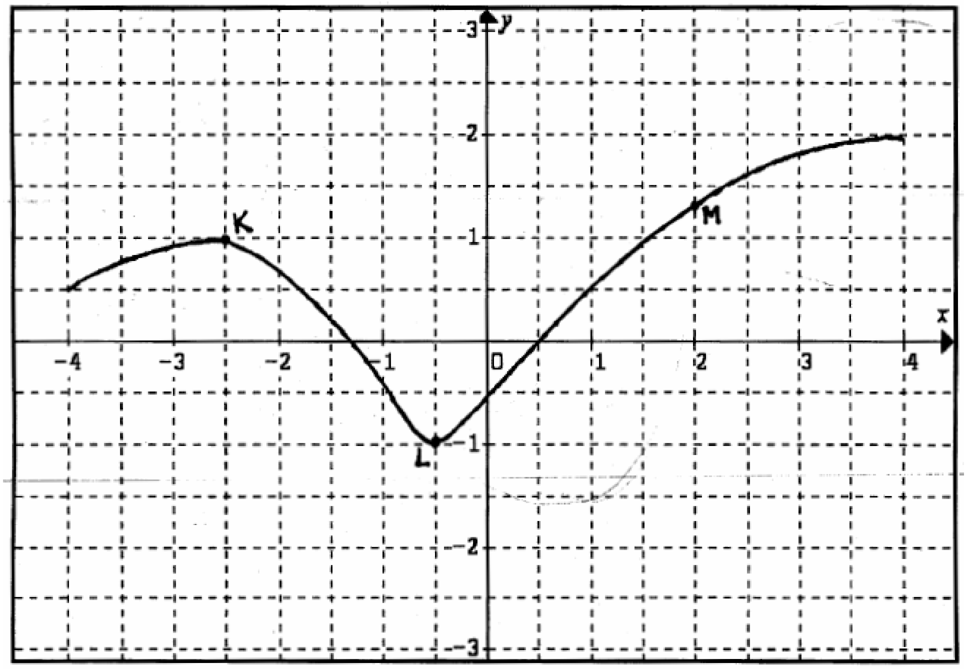
Rappelons tout d'abord de quoi il s'agit dans l'activité 1bis au niveau du contrat, de la consigne et de la formulation :

Dans cette activité, nous avons demandé aux élèves de tracer des courbes toutes différentes à partir d'une courbe sur laquelle on a donné trois points « fixes ».

Voici l'énoncé de cette activité :

**Activité 1 bis**

Voici la courbe d'une fonction qui est définie sur l'intervalle [-3 ; 3]. Tracez des courbes toutes différentes sur le même intervalle, qui passent chaque fois par les points K, L et M.




Tous les élèves sont arrivés à tracer plusieurs courbes (même si certaines ne sont pas des courbes représentatives d'une fonction !). Si nous avions fait l'activité 1bis toute seule, nous aurions pu croire que les élèves avaient bien compris qu'il y avait plusieurs courbes qui passaient par quelques points fixes.

Dans l'activité 1, comme dit ci-dessous, les élèves de groupes récepteurs n'ont reçu qu'un tableau de valeurs. Cela veut dire qu'une fois qu'ils ont placé les points du tableau de valeurs, dans un repère, ils se trouvent face à une tâche quasiment identique (sauf qu'il y a plus de points) à celle de l'activité 1bis. Néanmoins, les données sont issues du travail de leurs camarades et sont donc sensées être suffisantes pour tracer la courbe, qu'il s'agit de retrouver. Nous avons été surpris par le fait qu'un seul élève fait référence à l'activité 1bis, pendant qu'ils répondent à l'activité 1. Pourquoi alors les élèves ne posent pas de question sur la variabilité de la courbe entre deux points du tableau ou la possibilité d'avoir plusieurs courbes à partir d'un tableau de valeurs, alors qu'ils viennent de travailler sur l'activité 1bis où ils ont réussi à tracer plusieurs courbes ?

Nous expliquons cela par le fait que, d'une part, le fait qu'il y a plusieurs courbes possibles est en quelque sorte contenu dans la consigne de l'activité 1bis. Dans l'activité 1, ils interprètent la consigne comme « il n'y a qu'une courbe », puisqu'ils savent bien que leurs camarades ont donné des informations à partir d'une seule courbe et le jeu consiste à retrouver la même courbe. D'autre part, l'habitude scolaire qu' « à une question, il y a une seule réponse » est très forte chez les élèves. En effet, ils partent d'emblée dans l'idée de retrouver « la » même courbe, mais pas n'importe quelle courbe. La chose la plus problématique pour eux c'est l'activité de décodage des données du tableau fourni par leurs camarades.

Dans l'activité 1, les élèves ne remettent en question ni le fait qu'il y a une seule courbe, ni le fait qu'il peut y en avoir plusieurs. Nous pensons donc que pour eux ce n'est pas un enjeu mathématique, mais il s'agit d'un enjeu didactique seulement qui est une question de savoir comment se conformer à la réponse attendue, mais pas de savoir s'il y a plusieurs courbes ou s'il n'y en a qu'une seule. Cela veut dire que la mise en rapport de l'information d'un tableau de valeurs et du tracé de la courbe n'est pas une question mathématique mais c'est plutôt une question de conformité à ce qu'on leur demande. Nous pouvons dire ainsi que les élèves n'ont pas de connaissance sur cette conversion, il s'agit, dans ces deux activités, d'une adaptation à la consigne. Donc, à une connaissance mathématique qui devrait guider pour répondre à ces activités, se substitue une pure stratégie de jeu qui s'adapte à la règle du jeu.

Notons aussi que dans le groupe 5 où un élève a discuté de la variabilité du tracé en référence à l'activité 1bis, une de ses camarades lui rétorque : « *oui mais on n'a pas de point donné dans l'exercice d'avant mais ici on a des points donnés* ». Cette remarque est un peu délicate à interpréter, mais elle semble faire une distinction entre le registre tableau de valeurs (de l'activité 1) et la donnée de points sur un graphique. Peut-être, pour certains élèves, la variabilité est possible dans le registre graphique (on peut faire plusieurs tracés de courbes passant par des points fixes) alors qu'elle ne l'est plus quand on part du tableau de valeurs. Cependant, il faudrait plus de données pour confirmer ou infirmer ce fait.

***Discussion pendant la mise en commun***

Pendant la mise en commun, le professeur a mis tour à tour, dans un ordre aléatoire, sur le rétroprojecteur chaque fois un des messages des groupes émetteurs et la courbe proposée par le groupe récepteur correspondant. Il a fait discuter les élèves sur chacun des 3 couples message + courbe (pour chacune des deux séances de cours en demi-groupes)[17].

En général, les élèves trouvent que les tableaux de valeurs sont clairs et pertinents pour permettre de retrouver la courbe (« *Elles sont claires c'est bien rangé on comprend bien* »). Quand le professeur a demandé de comparer deux tableaux de valeurs donnés, les élèves ont en général préféré un tableau de valeurs qui comporte plus de point en disant « *c'est plus précis et ça donne plus d'indices sur la courbe* ».

Quand certains extrema ne se trouvent pas au bon endroit dans les courbes tracées par les groupes récepteurs, les élèves disent qu'il manque des points dans le tableau de valeurs donné, remettant en cause immédiatement le message des groupes émetteurs plutôt que le tracé des groupes récepteurs. D'autre part, quand le professeur a demandé ce qu'il était possible de faire pour que la courbe soit plus précise, la plupart des élèves disent alors qu'il fallait mettre des indices pour tous les carreaux (donc les points d'abscisse demi-entière) comme ça celle-ci serait plus précise. Ceci nous montre encore une fois qu'ils n'envisagent que la stratégie « point par point ».

Pour ce qui concerne les messages qui ne sont pas donnés sous la forme d'un tableau de valeurs, les élèves trouvent que ces messages sont un peu longs et qu'il était préférable de les donner dans un tableau de valeurs, ce qui confirme qu'il est une présentation habituelle.

A un moment donné, le professeur a demandé aux élèves si on peut envisager d'autres tracés entre deux points du tableau. Un élève dit alors « *si on n'a pas de points entre ces points là eh bien on peut passer par plusieurs endroits en effet par plusieurs chemins* ». Cette idée est tout de suite mise en cause par les autres élèves qui disent que le message a été fait à partir d'un tracé et qu'on ne peut pas tracer comme on veut.

Le professeur a aussi demandé aux élèves s'il y aurait une autre moyen de donner des informations, un élève répond ainsi ; « *Ben non si c'est une courbe !* », ce qui confirme ce qui a été observé dans le travail des groupes récepteurs.

A la fin de cette séance, le professeur n'est pas arrivé à faire une institutionnalisation à partir de cette activité. Puisqu'il a été perturbé par le fait que, d'une part, les élèves n'ont envisagé que des tableaux de valeurs comme informations sur la courbe et que d'autre part, si les élèves n'avaient pas fait d'erreur sur la lecture du graphique ou sur le placement des points, ils arrivaient à retracer à peu près la même courbe à partir de la stratégie « point par point », pas vraiment de moyen de remettre en cause leur stratégie.

### II.2.3 Expérimentation dans une autre classe (seulement pour les groupes émetteurs)

À l'issue de cette expérimentation, nous avons été surpris par le fait que, d'une part, pratiquement tous les groupes émetteurs ont utilisé la stratégie « point par point » en produisant un tableau de valeurs et que nous n'avons donc pas trouvé, dans leurs messages, d'allusion à la courbe en tant que globalité, et que, d'autre part, aucune information n'a été

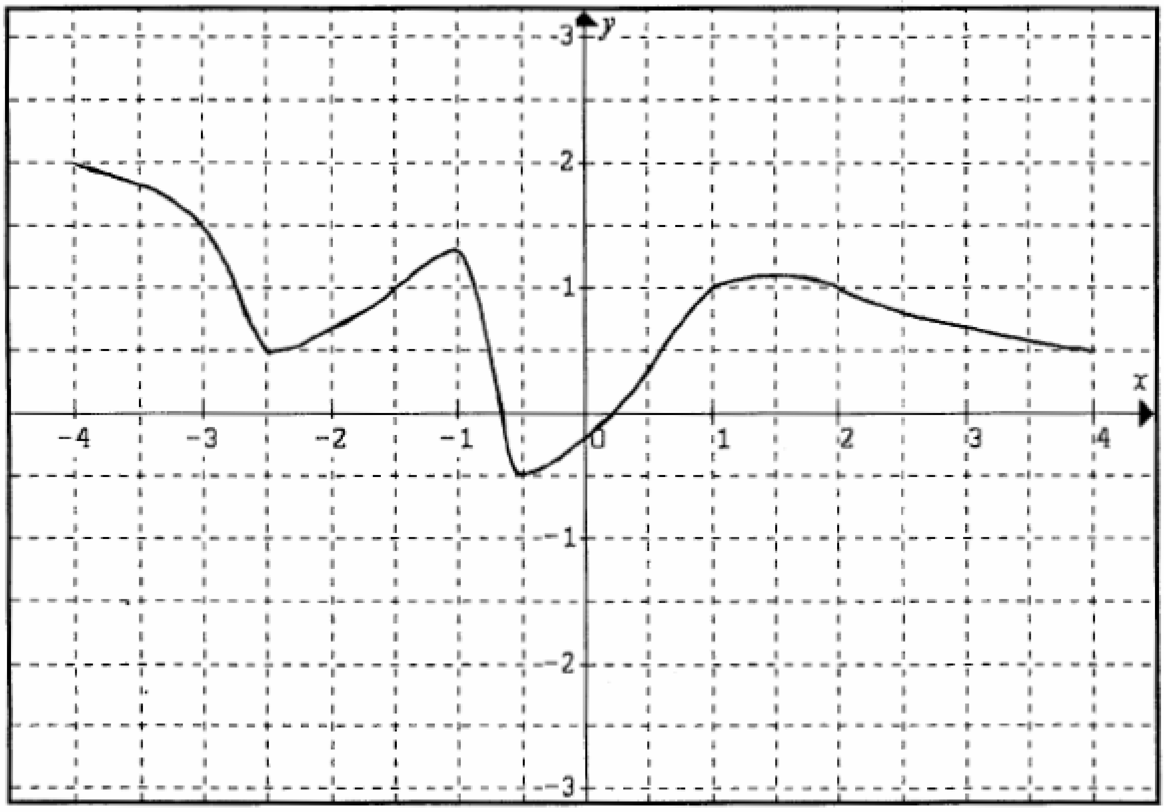
[17] Rappelons que nos analyses portent sur deux séances identiques en demi-classe, avec trois pairs de binômes (émetteurs et récepteurs à chaque séance). Dans ce qui suit, nous rendrons compte des deux séances globalement.

donnée sur les variations de la fonction, comme nous l'avons prévu dans l'analyse a priori.

C'est pourquoi nous avons décidé d'expérimenter à nouveau la première partie de cette activité (seulement pour les groupes émetteurs) dans une autre classe pour vérifier ces résultats surprenants. Nous avons donc demandé aux élèves de fournir des informations à partir d'une courbe, afin qu'un autre élève de seconde reproduise cette courbe le plus fidèlement possible. Dans cette classe, le professeur avait déjà fait trois séances sur la fonction dont deux en module. Nous avons photocopié le cours que le professeur a utilisé dans ces trois séances, ainsi que le cahier d'un élève. Dans ces documents, nous pouvons voir que le professeur utilise d'abord une situation connue (Parallélogramme qui tourne) issue du contexte géométrique, mettant en lien les registres algébriques et graphiques, pour pouvoir introduire certaines premières définitions liées aux fonctions (notion de fonction, d'image, d'antécédent, etc). Les exercices proposés ensuite privilégient les mêmes registres et les mêmes conversions. Notons que peu de tableaux de valeurs apparaissent.

Cette introduction est différente de celle faite dans la première classe puisque le registre algébrique était peu pris en compte et le contexte géométrique pas utilisé.

Cette expérimentation nous a permis de faire des modifications sur la courbe proposée. Puisque, dans la première expérimentation, il était difficile de distinguer la stratégie quadrillage et la stratégie extrema (tous les extrema étaient des intersections du quadrillage et donc la stratégie quadrillage masquait la stratégie extrema). Ainsi, pour arriver à discriminer les deux stratégies, nous avons changé la place de deux extrema qui ne sont plus des points remarquables sur le quadrillage et nous avons également « aplati » la courbe entre $x = 1$ et $x = 2$, ce qui risque de provoquer des difficultés de lecture de cet extrema.Voici la nouvelle courbe proposée aux élèves :




L’expérimentation s’est déroulée en module (en deux temps concernant chacun une demi-classe) et chaque séance a duré 10 minutes. Le professeur a seulement lu l’énoncé de l’activité sans rien ajouter. 28 élèves ont répondu et aucune remarque n’a été soulevée par les élèves sur cette activité.

Voici la catégorisation des réponses des élèves selon les termes de notre analyse a priori :

- 3 élèves utilisent la stratégie « quadrillage simple ».

Ces élèves considèrent cette courbe comme une ligne tracée dans le plan et les points du quadrillage jouent alors le rôle essentiel dans les descriptions qu’ils donnent. Ces réponses sont intéressantes et montrent une fois de plus la prégnance des points de la courbe sur les nœuds du quadrillage. Comme nous avions placés des extrema qui ne se trouvent pas sur les nœuds du quadrillage, ceux–ci ne sont pas pris en compte. Ceci confirme les premiers résultats sur la non prise en compte des variations de la fonction sur la courbe.

- 11 élèves donnent un maximum d’information sur la courbe en donnant toutes les coordonnées demi-entières (abscisse demi-entière).

Nous ne savons pas l’origine de cette stratégie. Soit les élèves sont influencés par la forme du quadrillage (le pas 1/2), et font ainsi un balayage systématique sans prendre en compte l’allure de la courbe (influence du tableau de valeurs), soit ils prennent en compte l’allure de la courbe et les extrema et ensuite donnent un maximum de points.

- 8 élèves utilisent la stratégie « quadrillage simple » et la stratégie « extrema simple » ensemble, c'est-à-dire les points d'extrema avec les points où il y a une intersection avec le quadrillage.

Ainsi, ces élèves, même s'ils ont une conception « point par point » de la fonction, ont bien compris l'importance des extrema pour la description de la courbe. Notons que trois d'entre eux ne précisent pas le point pour x = 1,5 où l'ordonnée n'est pas entière, ce qui est conforme à notre analyse.

- 3 élèves utilisent la stratégie « extrema simple ».

Ces élèves ne donnent que les points des extrema de la fonction et ainsi ceci montre qu'ils ont bien conscience l'importance des extrema dans la description de la courbe. Remarquons ici qu'aucune d'entre eux ne donne le point de l'abscisse x = 1,5 où l'ordonnée n'est pas entière, ce qui confirme à notre analyse.

Toutes les réponses des élèves que nous venons de citer montrent qu'ils ont une conception discrète de la fonction, ce qui confirme les résultats de la première classe. Notons que quelques élèves ajoutent qu'il faut relier tous ces points à la main sans faire de droites. Nous pensons que cette précision est donné pour empêcher simplement la stratégie « courbe simple rectiligne » par l'élève qui doit tracer cette courbe, et non pas une précision sur la globalité de la courbe.

- 3 élèves seulement donnent les descriptions sur les variations de la fonction en utilisant des expressions telles que « la courbe monte, descend,… ».

Ainsi, seul ces trois élèves donnent des descriptions sur la globalité de la courbe et montrent qu'ils ont une conception continue sur la fonction. Voici un de trois réponses :

> « La courbe commence par un point de coordonné -4 sur la droite des abscisses et 2 en ordonnée. Faire une courbe jusqu'à -2,5 en abscisse et 0,5 en ordonnée en passant par -3 en abscisse et 1,5 en ordonnée. La courbe va remonter en passant par -1,5 en abscisse et 1 en ordonnée. La courbe redescendra à partir du petit espace (le $2^{ème}$ en partant du bas) se trouvant sur le carré entre 1 et 1,5 ordonnée. La courbe redescente à -0,5 sur abscisse et -0,5 sur ordonnée. Elle remonte en 1 sur ordonnée et 1 sur abscisse, remonte légèrement et redescente à -1 en ordonnée et 2 en abscisse. Puis finit à 0,5 en ordonnée et 4 en abscisse. »

Finalement, la plupart des élèves utilisent la stratégie « point par point » sans faire des précisions sur la globalité ou sur la continuité de la courbe. Ils ont donc une conception discrète sur la fonction. La seule différence avec la classe précédente est que pratiquement aucun élève n'utilise la forme d'un tableau de valeurs (sauf un utilise un tableau vertical) pour présenter les coordonnées des points qu'ils donnent.

Notons que, quelques jours après cette expérimentation, sans notre présence, le professeur redistribue les messages aux élèves de façon aléatoire. Il leur demande de tracer une courbe à partir du message reçu et de faire un commentaire sur le message. La plupart des élèves fait remarquer qu'il aurait fallut donner plus de points à placer pour que la courbe soit encore plus précise. Plus particulièrement, l'élève qui reçoit le message ci-dessus (concernant la globalité de la courbe) fait la remarque suivante :

> « En voyant la courbe, il aurait fallu donner plus de points avec des coordonnées précises et non les mouvements de la courbe ».

## CONCLUSION

*Le tableau de valeurs cache le tableau de variations !*

Un des buts principaux de cette activité était de faire émerger la nécessité d'une description de la courbe en termes de variations continues et à partir de là d'introduire le tableau de variations. Par contre, nous avons constaté qu'il y a une illusion des élèves sur le fait que, d'une part, le tableau de valeurs (ou des coordonnées simples) est un moyen de bien rendre compte de la courbe pour les groupes émetteurs et d'autre part, que le tableau de valeurs est pertinent par rapport au problème posé pour les groupes récepteurs. Les élèves ne voient donc pas de réelles difficultés à tracer une courbe à partir de la donnée de plusieurs points. Tout au plus, ils peuvent considérer qu'il faudrait quelques points supplémentaires (pour combler des trous). Il n'y a pas de réelle interrogation sur la forme que peut prendre une courbe entre deux points dès lors que ces deux points ne sont pas trop espacés. Dans ce sens, l'idée de faire émerger de cette situation la notion de variation et au-delà de tableau de variations n'a pas fonctionné dans le travail en binômes.

En effet, les élèves ne voient pas réellement la variation comme quelque chose d'importance comme information sur la courbe et donc celle-ci ne s'impose pas comme un critère de description. On sent en fait qu'autant le tableau de valeurs est naturel, autant le tableau de variations est compliqué et ne s'impose pas.

*Les conceptions des élèves sur la représentation graphique d'une fonction*

Un autre but principal de cette activité était de savoir comment les élèves décrivent une courbe et, en particulier, d'évaluer la pertinence de leur argumentation par rapport à la représentation d'une fonction. Pour décrire la courbe, les élèves utilisent en général la stratégie « point par point » avec les points du quadrillage et les points caractéristiques qui sont donnés, sont essentiellement par rapport à la facilité de lecture des coordonnées, mais pas par rapport à la forme de la courbe. Il apparaît donc que les élèves se situent avant tout dans le registre graphique, sans faire référence à la représentation d'une fonction : Ils travaillent sur la courbe comme si c'était un dessin dans un quadrillage indépendamment de tout le reste. Ce qui est absent chez les élèves c'est la contrainte qu'une courbe se trace à partir de la relation dépendance entre l'abscisse et l'ordonnée. En effet, pour tracer une courbe il y a des contraintes qui font que l'on se déplace dans le sens de l'abscisse croissante et donc, on s'intéresse du coup aux changements de variations dans les valeurs de l'ordonnée. Les points d'une courbe apparaissent ainsi comme des points où les valeurs de l'ordonnée change de la variation quand l'abscisse continue à croître. Alors que les élèves ne raisonnent pas comme ça, ils n'ont pas une notion de dépendance d'une variable sur l'autre. Ils voient la courbe comme un objet du plan délimité par certains points ayant des particularités topologiques, ce que nous avons appelés plus haut les points limites, qui se trouvent correspondre aux extrema, mais qui ne sont pas vus par les élèves en tant que tels.

En effet, le registre graphique est connu des élèves, mais ceux-ci n'ont quasiment aucune expertise sur ce registre dans le cadre des fonctions. Pour eux, une courbe n'est rien d'autre qu'un dessin et ils le prennent pour tel sans pouvoir relier les propriétés de ce dessin avec des propriétés de la fonction qu'il représente. Ainsi, cette conception de la courbe cache complètement l'idée de dépendance entre deux variables. Ceci nous permet donc de voir les limites de ce qu'on peut faire en partant de la représentation graphique d'une fonction. Même s'il apparaît comme un registre plus familier (plus intuitif) que le registre algébrique notamment, il offre des limites dans la possibilité d'introduire des notions sur les fonctions, voire même peut s'ériger en obstacle. Comme ici, où on pourrait dire dans une certaine mesure que le registre graphique est un obstacle à l'introduction de l'idée de variation et d'extrema d'une fonction, puisque les points de la courbe qui correspondent aux extrema correspondent aussi à des points topologiquement particuliers dont les propriétés de ce point de vue sont plus parlantes aux élèves.

Ceci rejoint d'ailleurs les résultats d'autres études sur les fonctionnalités du graphique dans l'étude des fonctions. Plus particulièrement, Chauvat (1999) distingue dans une courbe huit objets discernables, dont cinq mathématiques (deux relevant de la théorie des ensembles, et trois de la géométrie) et trois objets concrets, relevant du dessin. A ce propos, Bloch (2000) précise ainsi :

> « L'utilisation du registre graphique dans le contrat classique ne prend pas en compte ces différents objets, pourtant sources de confusions et d'implicites ; les recherches[18] montrent que l'enseignement traditionnel utilise surtout les graphiques sur le mode idéogrammatique[19], ce qui conduit à des phénomènes de dédoublement didactique, l'enseignant croyant que les élèves voient dans le graphique la même chose que lui (une fonction) alors que les élèves n'y voient qu'un idéogramme ou une icône ». (op. cité, p. 198)

Et elle précise également,

> « Le graphique est vu dans le contrat classique comme une « photographie » de la fonction ou comme un idéogramme, ce qui peut amener à accorder à la fonction des propriétés qui sont en fait celles du dessin » (Bloch 2002, p. 41).

*Relation entre tableau de valeurs et représentation graphique*

Cette expérimentation nous a permis de revenir sur l'utilisation du tableau de valeurs par les élèves au regard de la relation avec le registre graphique. En effet, la conversion entre les registres tableau de valeurs et graphique ne semble pas problématique aux élèves à ce niveau de l'enseignement et ces deux registres fonctionnent de façon assez indépendant. En particulier, le fait qu'une courbe contienne plus d'information qu'un tableau de valeurs n'est pas encore réellement perçu. Parce que pour les élèves, une fois qu'on a « le bon » tableau de valeurs on peut trouver « la » courbe. On voit que dans ce décalage, il y a la place pour instituer ce qu'est le tableau de variations. Néanmoins, contrairement à ce que nous avions cru au moment de créer cette activité, les élèves n'ont apparemment pas les moyens de dégager seuls, ce nouvel objet d'autant que comme nous l'avons souligné, ils ont par rapport au

[18] Lacasta 1995, Trouche 1996 (cités par Bloch, 2000)

[19]Ce mode correspond au fonctionnement du graphique comme idéogramme, c'est-à-dire comme signe graphique qui renvoie à une idée : dessin d'une parabole pour représenter des variations quadratiques, d'une sinusoïde pour des variations périodiques avec alternance de maximum et minimum… Le graphique est construit de façon à montrer les courbes sous la forme standard définie par l'institution dans laquelle il est utilisé (Chauvat, 1999).

registre graphique des connaissances qui font obstacle à l'émergence de l'idée de variation.

L'idée de la courbe comme une série de points qu'on réunit est très forte alors que l'idée des variations (et donc d'une certaine globalité) reste absente ou très minoritaire. Travailler longtemps et seulement sur les tableaux de valeurs, ce qui est le cas dans les exercices (et avec la calculatrice !) risque de créer un obstacle à la construction de l'idée globale de courbe ; la stratégie « point par point » fonctionne très bien et donc, il est difficile d'aller contre cette conception, les extrema restent souvent implicites.

Finalement, cette expérimentation nous a montré des disfonctionnement au niveau des registres: Ainsi, on pourrait croire que ces deux objets la courbe et le tableau de valeur sont relativement simples et assez naturels et donc qu'il y a peu de connaissance qui leur sont attachées. Bien sûr ce n'est pas le cas. Plus particulièrement, on voit bien que le registre graphique est piégeant et si on ne le relie pas avec d'autres registres, on s'éloigne de la fonction. Tout cela nous amène de dire dans le sens de Duval, que les liens entre les registres sont très importants pour la compréhension de la notion de fonction et que le travail autonome dans un registre ne suffit pas.

*Les résultats sur les pratiques des enseignants*

Comme nous l'avons dit au début, l'idée de faire émerger le sens de variation (et donc d'introduire le tableau de variations) à partir de cette activité n'a pas fonctionné dans le travail en binômes. De plus, pendant la mise en commun, le professeur n'est pas non plus arrivé à montrer l'importance de la prise en compte des variations. Ceci montre tout d'abord la difficulté pour un enseignant de s'approprier une ingénierie didactique qu'il n'a pas lui-même conçue.

On peut avancer deux raisons à cet état de fait. Tout d'abord, lors des entretiens préalables avec l'enseignant, nous lui avions expliqué le but de notre ingénierie et l'esprit dans lequel la séquence avait été construite. Celui-ci en avait induit quelques règles de conduite à adopter lors de la réalisation effective (surtout sous forme d'interdits). De fait, il n'a pas su gérer les imprévus inévitables qu'il a pu rencontrer. Ceci montre que pour un enseignant, il est difficile d'agir lors d'une séquence en conformité avec un esprit général qu'il a pourtant approuvé. D'autre part, on pourrait penser que certaines exigences de gestion impliquées par la mise en œuvre de cette séquence étaient difficiles à respecter en classe, notamment la gestion du passage des phases de travail en petits groupes aux phrases de bilan, comme l'ont montré d'autres chercheurs[20].

[20] Bolon 1996, Vergnes 2000 (cités par Robert 2001)

# Chapitre C3

# Analyse des troisième et quatrième séances

## I. Troisième séance (cours : étude des variations d'une fonction)

Le professeur est revenu sur l'activité 1 et après avoir précisé le fait qu'entre deux points du tableau de valeurs on peut tracer différentes courbes, a dit que les tableaux de valeurs ne suffisent pas pour faire tracer la même courbe et qu'il y a une autre information qu'il faut donner : ce sont les variations des fonctions.

Ensuite il a précisé ce qui allait être défini dans cette séance : une fonction croissante correspond à une courbe qui monte sur un intervalle et une fonction décroissante correspond à une courbe qui descend sur un intervalle.

Il a utilisé la courbe de l'activité 1 pour introduire les notions liées au sens de variation d'une fonction. Il a d'abord choisi l'intervalle [-0,5 ; 1,5] où la fonction est croissante. Il a montré que dans cet intervalle les abscisses et les ordonnées sont rangées dans le même ordre. Il a ensuite choisi l'intervalle [1,5 ; 4] où la fonction est décroissante. Il a monté que dans cet intervalle, les abscisses et les ordonnées sont rangées dans l'ordre contraire. A partir de là, il a conclu ainsi :

> Donc ceci va nous conduire à la définition :
> On dira que la fonction est croissante, lorsque la courbe monte. Les abscisses et les ordonnées des points sont alors rangées dans le même ordre.
> On dira que la fonction est décroissante, lorsque la courbe descend. Les abscisses et les ordonnées des points sont alors rangées dans l'ordre contraire.

Il a ensuite dicté la définition suivante :

> f est une fonction. D son ensemble de définition. Dire que la fonction f est croissante sur I, intervalle de D signifie que pour tout réel a, $b \in I$, si $a \leq b$ alors $f(a) \leq f(b)$.
> Les nombres f(a) et f(b) sont dans la même ordre que a et b.
> On dit que f conserve l'ordre

Après avoir illustré la définition ci-dessus par une courbe, il a dicté la définition d'une fonction décroissante.

> Dire que f est décroissante sur I, intervalle de D signifie que pour tout réel a et b de I,
> si a ≤ b alors f(a) ≥ f(b).
> Les nombres f(a) et f(b) sont rangés dans l'ordre contraire de celui de a et b.
> On dit que la fonction f change l'ordre.

Il est ensuite passé directement au tableau de variations d'une fonction en disant : « *Bon pour résumer, pour schématiser les variations d'une fonction on va utiliser ce qu'on appelle un tableau de variations* ». Il a commencé à construire le tableau de variations dont la fonction est représentée par la courbe de l'activité 1.

Voici ce que le professeur a dit pendant qu'il a construit le tableau de variations :

> Alors, ce tableau comporte deux lignes : Dans la première ligne je vais mettre les valeurs de x, dans la seconde ligne, les valeurs de f(x). Dans la première ligne, je vais indiquer les valeurs de x pour lesquelles il y a un changement dans la variation de la fonction. Je commence d'abord par indiquer l'ensemble de définition (…). Ensuite je regarde les valeurs de x pour lesquelles il y a un changement de variation. Donc on voit que la courbe descend jusqu'au point d'abscisse -2,5 donc je marque « -2,5 » (…). Ensuite les variations de la fonction par des flèches : lorsque la courbe monte eh bien je représente par une flèche qui monte, lorsque la courbe descend je représente par une flèche qui descend (…) et ensuite on va mettre aux extrémités des flèches les valeurs de f(x) qui correspondent (…).

Une fois qu'il a eu fini le tableau de variations, il a donné les précisions suivantes sur ce tableau :

> Alors attention j'ai dessiné ici des flèches cela ne signifie pas que sur l'intervalle [-4 ; -2,5] la courbe est un segment de droite, ça signifie simplement que, puisque le flèche descend, que la courbe descend voilà.
> Vous voyez que ce tableau il me fournit comme informations les variations de la fonction et d'autre part, j'ai des points de la courbe. Donc déjà ces deux informations dans ce tableau ! Par contre, si je prends par exemple l'intervalle [-0,5 ; 1,5], je sais que la fonction est croissante dans cet intervalle, je sais aussi que la courbe va passer par les points (-0,5 ; -0,5) et (1,5 ; 1,5) mais par contre, je n'ai aucune information sur les points intermédiaires si ce n'est que les abscisses et les ordonnées de ces points sont rangées dans les mêmes ordres.

Pour terminer le séance, il a proposé aux élèves trois courbes à partir de l'activité 1bis et il a demandé de construire les tableaux de variations correspondants. Les élèves ont commencé à répondre, mais faute de temps, la séance s'est terminée sans mise en commun ni correction. Le professeur a alors demandé de finir à la maison.

Pour résumer, on voit donc que, dans cette séance, le professeur a introduit les notions de fonction croissante et de fonction décroissante à partir du registre graphique en prenant la courbe de l'activité 1 comme exemple et en mettant en avant l'aspect visuel de la croissance (« la courbe monte »). Puis il a donné une définition formelle de ces notions dans le registre symbolique à partir de la lecture graphique. Néanmoins, les élèves n'ont pas eu d'occasion ni de donner leur opinion ni de travailler ces notions avec des exercices.

D'autre part, il a donné un procédé de construction d'un tableau de variations en donnant pour seul objectif de résumer les variations d'une fonction. Il a en plus anticipé des erreurs d'élèves

(Confusion entre les flèches du tableau et les segments de la courbe, non connaissance des valeurs de la fonction entre les extrema) mais sans faire faire des activités qui permettraient de travailler ces difficultés.

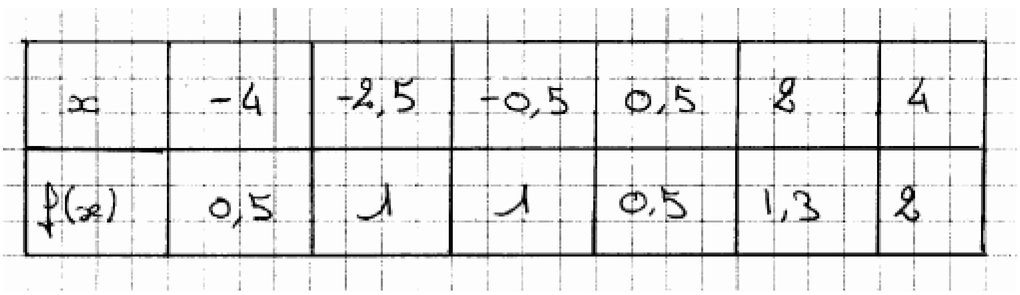
*<u>Les réponses des élèves</u>*

Le lendemain, nous avons recueilli les réponses des élèves pour l'exercice laissé à chercher à la maison en fin de séance. 22 élèves sur 28 nous ont rendu leurs copies.

Rappelons que les trois courbes données par le professeurs étaient issues de l'activité 1bis, c'est-à-dire qu'elles avaient en commun de passer toutes les trois par les trois points K(-2.5 ;1) L(-0.5 ;-1) et M (2 ; 1.5). De fait de nombreux élèves ont ressenti la nécessité de reporter les abscisses et ordonnées de ces points dans leurs tableaux de variations, ce qui a un peu brouillé les réponses. Néanmoins, on voit très nettement que pour quasiment la moitié de ces élèves, la syntaxe d'un tableau de variations pose des difficultés et qu'il y a des interférences avec les tableau de valeurs. Ces élèves semblent en effet tous construire leur idée d'un tableau de variations à partir d'un tableau de valeurs en adaptant leurs connaissances. Cela va de celui qui donne tout simplement un tableau de valeurs, à ceux qui ne gardent que quelques résidus visuels du tableau de valeurs (les cases séparées pour les valeurs de x) en passant par ceux qui rajoutent des flèches dans des cases d'un tableau de valeurs. Dans cette première activité où les élèves ont la responsabilité de construire des tableaux de variations, on perçoit la difficulté à comprendre le mode de traitement dans un registre nouveau qui se construit, consciemment ou non, à partir du registre connu des tableaux de valeurs.

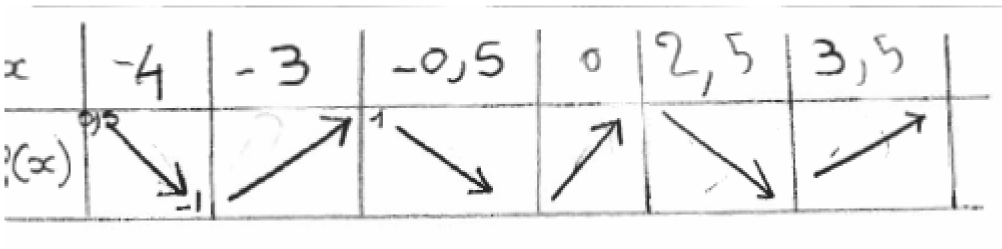
Pour mieux saisir la diversité de ces difficultés, qui vraisemblablement ne persisteront pas, nous donnons ci-dessous, la plupart d'entre elles, avec quelques commentaires. Notons que les réponses des élèves sont cohérentes dans les trois cas, nous ne donnerons donc leurs réponses pour un même élève qu'à un seul des trois tableaux de variations. Par ailleurs, la plupart des élèves commettent aussi quelques erreurs dans la lecture des variations, qui restent cependant minimes et semblent plus relever de l'étourderie. Nous ne les prendrons pas en compte dans notre analyse pour ne pas surcharger.

- Un élève donne carrément trois tableaux de valeurs en prenant en compte les valeurs extrémales des fonctions et les points K, L, M que nous avions fixés sur la courbe de l'activité 1bis. Voici un des tableaux de valeurs qu'il a donné :



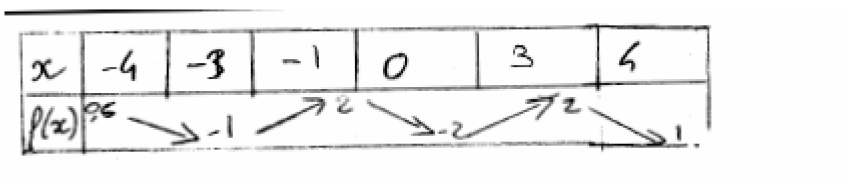
| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| x | -4 | -2,5 | -0,5 | 0,5 | 2 | 4 |
| f(x) | 0,5 | 1 | 1 | 0,5 | 1,3 | 2 |

- Deux autres élèves repèrent bien implicitement les points où la fonction change de variations, mais ne semblent pas avoir compris les règles de construction d'un tableau de variations. En effet, ils découpent le tableau de variations en cases pour chaque couple de valeurs (x, f(x)). Voici un des tableaux de variations qu'ils ont donné (pour la première courbe, les réponses aux autres courbes étant construites sur le même principe) :



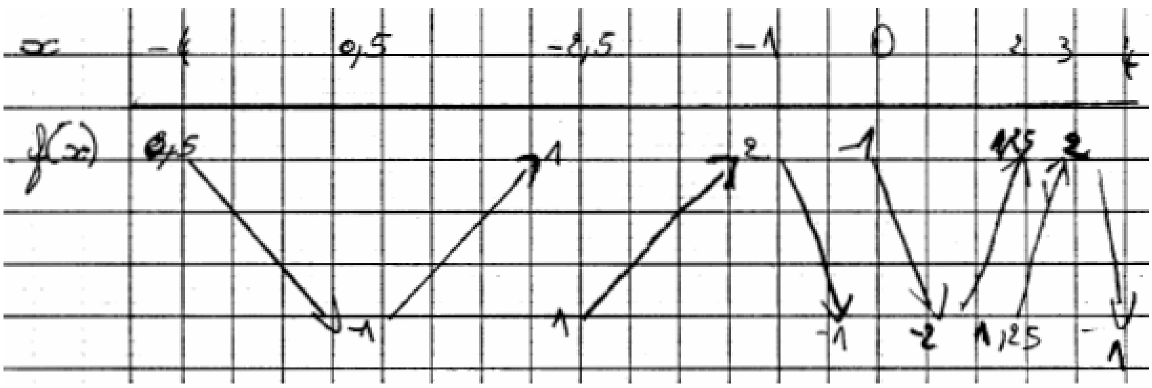

Un de ces élèves n'a pas rempli les valeurs correspondant de la fonction et l'autre ne les met pas aux extrémités des flèches, il les met donc dans le même niveau.

- Deux élèves découpent le tableau de variations en cases seulement pour les valeurs de x. Voici le type de tableau de variations qu'ils ont donné :



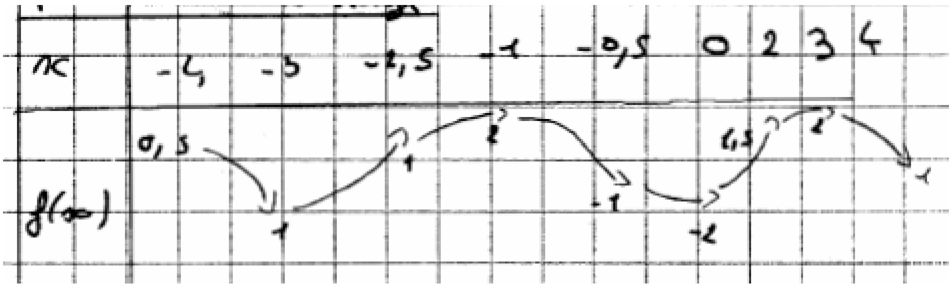

Un de ces élèves met les valeurs correspondantes de f(x) en bas du tableau au lieu de les mettre aux extrémités des flèches.

- Un autre élève donne le tableau de variations suivant (pour la deuxième courbe, les réponses aux autres courbes étant construites sur le même principe) :




Cet élève part d'un tableau de valeurs qui contient les extrema et quelques autres valeurs et essaie de mettre des flèches dans la ligne des valeurs de f(x). Ayant apparemment bien compris l'usage des flèches et la syntaxe qui y est attaché il donne un tableau qui peut sembler complexe mais qui est tout à fait cohérent avec son mode d'approche.

- Un autre élève utilise des flèches qui ont la même forme de la courbe en terme de concavité. C'est-à-dire que les flèches qu'il utilise ne sont pas faites par des segments de droite mais elles ont de la forme concave ou convexe selon la forme de la courbe dans cet intervalle. Voici un des tableaux de variations qu'il a donné :




Finalement un peu plus de la moitié des élèves (12 sur 22) arrivent à répondre à peu près correctement à cet exercice, même si 6 d'entre eux rajoutent les valeurs correspondant aux points K, L, M (en rajoutant les valeurs de f(x) sur la flèche). Notons aussi le cas d'un élève qui en plus, trace des flèches courbes et non rectiligne (peut-être est-ce lié à la remarque de l'enseignant lors de la séance de cours).

Ces résultats montre que contrairement à ce qu'on aurait pu croire, en début d'apprentissage, construire correctement un tableau de variations peut être problématique pour un nombre non négligeable d'élèves. Ces difficultés semblent venir d'une prégnance de la syntaxe du tableau de valeurs qui vient brouiller la compréhension du codage correct d'un tableau de variation. Il est fort probable que ces difficultés ne persistent pas, au moins dans des tâches routinières, mais elles peuvent toutefois ressurgir dans des situations moins habituelles. Dans ce sens, il sera intéressant d'observer les difficultés éventuelles des élèves dans l'activité 2 où les trois registres, graphique, tableau de valeurs et tableau de variations vont se trouver mêlés, avec des conversions nécessaires à plusieurs niveaux.

## II. Quatrième séance : expérimentation de l'activité 2

Comme nous l'avons déjà dit, cette activité a été réalisée après l'activité 1 et une séance de cours sur les variations des fonctions, avec les mêmes élèves et le même professeur, cela correspondait donc à la quatrième séance sur les fonctions. Malheureusement, un ennui technique a fait que nous n'avons pas pu récupérer le son de l'enregistrement vidéo de l'expérimentation de l'activité 2. Nous baserons donc nos analyses sur les réponses des élèves, les images et les notes prises pas les observateurs.

Comme cette analyse ne nous a pas donné entière satisfaction, nous avons expérimenté à nouveau l'activité 2 dans une autre classe quelques semaines plus tard. Nous rendrons compte de cette nouvelle expérimentation dans la suite.

Voici notre analyse à partir de ces données en commençant par la première classe :

## II.1 Analyse a posteriori de l'activité 2

Celle-ci commence dès le début de la 4$^{\text{ième}}$ séance qui se déroule en classe entière. L'exercice laissé en fin de séance précédente ne sera corrigé que plus tard.

Rappelons la première question qui est distribuée aux élèves en ouverture de cette activité.

### II.1.1 Exercice 1

Soit une fonction f définie sur l'intervalle [-3; 3] dont on connaît le tableau de valeurs suivant :

| *x* | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *f(x)* | 2 | 1 | -1 | 0 | 0.5 | 1 | 2 |

**a.** Tracer une courbe compatible avec ce tableau de valeurs.
**b.** Peut-on en tracer d'autres ? Si oui, utilisez le dos de la feuille pour donner votre réponse.
Si non, expliquer.

***Question a***

L'hypothèse que nous avions faite, à savoir que les élèves, après avoir placé les points correspondants au tableau de valeurs, tracent une courbe « simple lisse » ou « rectiligne », est vérifiée pour tous les élèves.  Dans ce cas, les extrema de la fonction sont (-3 ; 2), (-1 ; -1) et (3 ; 2).

***Question b***

Tous les élèves, contrairement à ce que nous avions prévu au vu des résultats à notre questionnaire (cf. chapitre B4), tracent plusieurs courbes pour cette question. Nous pensons que, d'une part l'activité 1bis a joué un rôle très important et que, d'autre part, la forme de la question incitait plus ici que dans notre questionnaire à chercher d'autres courbes (trois quadrillages vierges avec un repère étaient donnés sur la feuille de réponse). De plus ici la courbe lisse la plus simple n'est pas une droite contrairement au questionnaire.

Nous avons catégorisé les réponses des élèves selon l'analyse a priori. Nous précisons tout d'abord qu'aucun élève ne trace de courbe en changeant « profondément » la courbe initiale seulement entre un des deux points successifs pour n'introduire qu'un nouveau minimum ou un maximum (appelé « 2. Introduction de nouveaux extrema » dans l'analyse a priori).

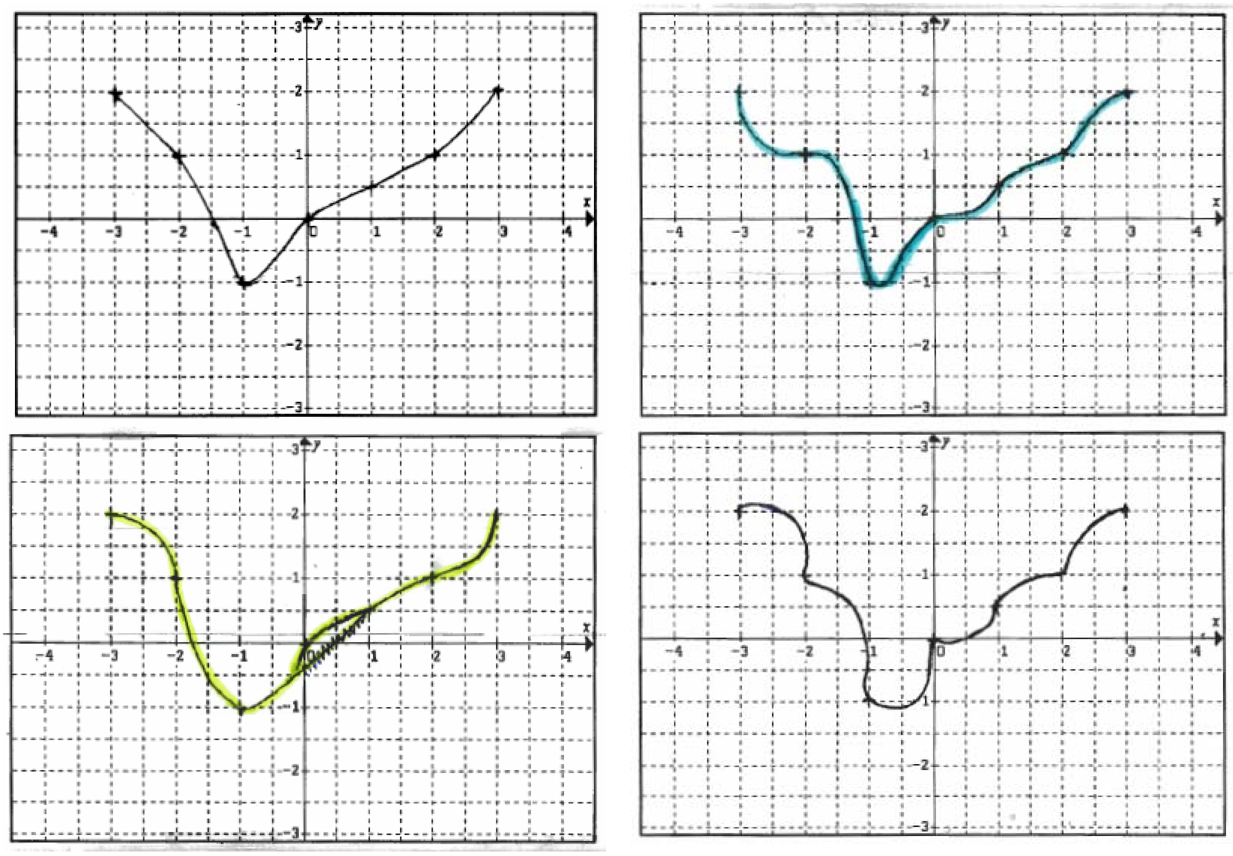
*1. Persistance d'une stratégie dominante*

21 élèves (sur 28) se placent toujours dans une même stratégie chaque fois qu'ils tracent une nouvelle courbe. Notons du fait que nous avions mis trois repères sur le verso de la feuille, la plupart des élèves tracent 3 courbes (exceptionnellement seulement 2) en plus de la courbe initiale. Mais certains tracent aussi plusieurs courbes sur un même repère.

*1a. Ceux qui tracent toujours des courbes ressemblantes à la courbe initiale*
*(E5, E6, E7, E8, E9, E11, E12, E18, E24, E25)*

9 élèves se trouvent dans cette catégorie. Ils tracent chaque fois des courbes en faisant un léger changement sur une partie ou sur toute la courbure de la courbe initiale en gardant sa globalité. C'est donc la courbe initiale qui guide le tracé de ces courbes et les extrema de la courbe initiale sont conservés. Dans cette catégorie, certains élèves, en faisant des virages un peu plus accentués, à partir de la courbe initiale, tracent des « courbes vagues », selon les termes de notre analyse a priori.

Voici la réponse de E6 (la première courbe étant pour la question 1a et les autres pour la question 1b):



Trois élèves de ce groupe donnent par écrit les explications suivantes :

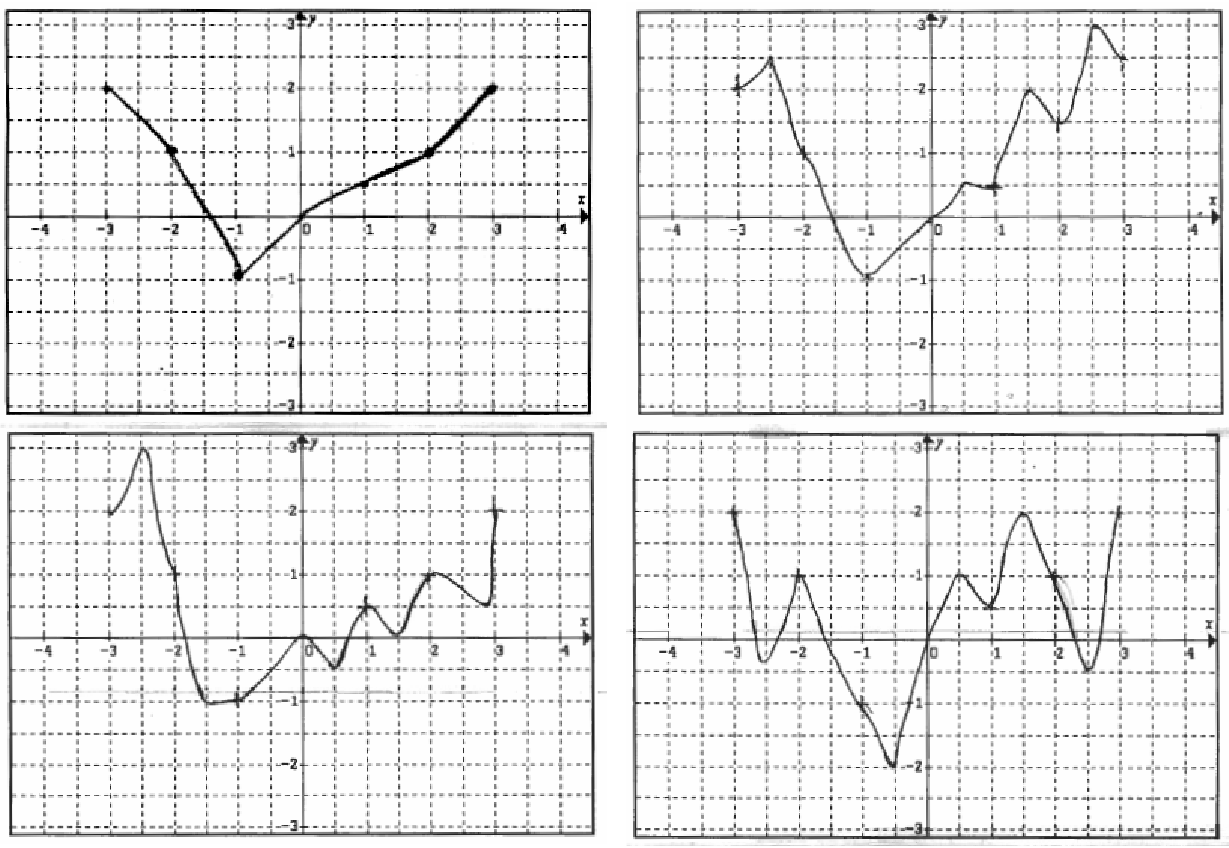
> E12 : « Oui, on peut tracer d'autres courbes avec les mêmes points. »
> E24 : « Oui, car il y a une certaine liberté dans ce graphique. Aucune information précise à part les coordonnées des points ne m'est donnée. Si on devait ne tracer qu'une seule courbe il aurait fallut un tableau de variations. » (*élève redoublant*)
> E25 : « Oui, on peut en tracer d'autres car il suffit seulement que la courbe passe par les points. »

Ces élèves, même s'ils ont conscience qu'on peut tracer d'autres courbes et qu'il y a des libertés entre deux valeurs du tableau, n'arrivent pas à sortir de l'influence de la courbe initiale et restent toujours dans la même stratégie. En particulier, toutes leurs courbes correspondent au même tableau de variations et les points fixés par les données de l'énoncé restent les seuls extrema possibles.

*1b. Ceux qui tracent toujours des courbes « libres » (E2, E10, E14, E20, E22, E27)*

6 élèves se trouvent dans cette catégorie. Ils tracent des courbes « libres », se dégageant ainsi de la contrainte implicite de choisir les extrema de la fonction parmi les points donnés dans le tableau de valeurs. Cependant, certains élèves semble se situer dans le registre « dessin », oubliant les contraintes liées à de la représentation d'une fonction ; Ainsi certains tracent des courbes qui sont à la limite de la représentation d'une fonction, soit parce qu'elles ne respectent pas l'intervalle de définition, soit parce qu'elles « reviennent en arrière », autrement dit ne respectent plus l'unicité de l'image.

Voici la réponse de E2 pour ces deux questions :



Un de ces élèves donne l'explication suivante :

E22 : « Oui, je pense que nous pouvons en tracer d'autres. Mais celle-ci semble la plus logique »

Cette explication nous montre que, bien qu'il soit capable de trouver d'autres courbes, cet élève pense que la courbe la plus logique est la plus lisse, la première qu'il a tracé. Ses autres réponses semblent être lié à un effet de contrat dans le sens où la formulation de la question impose d'autres réponses.

Un autre élève donne l'explication suivante :

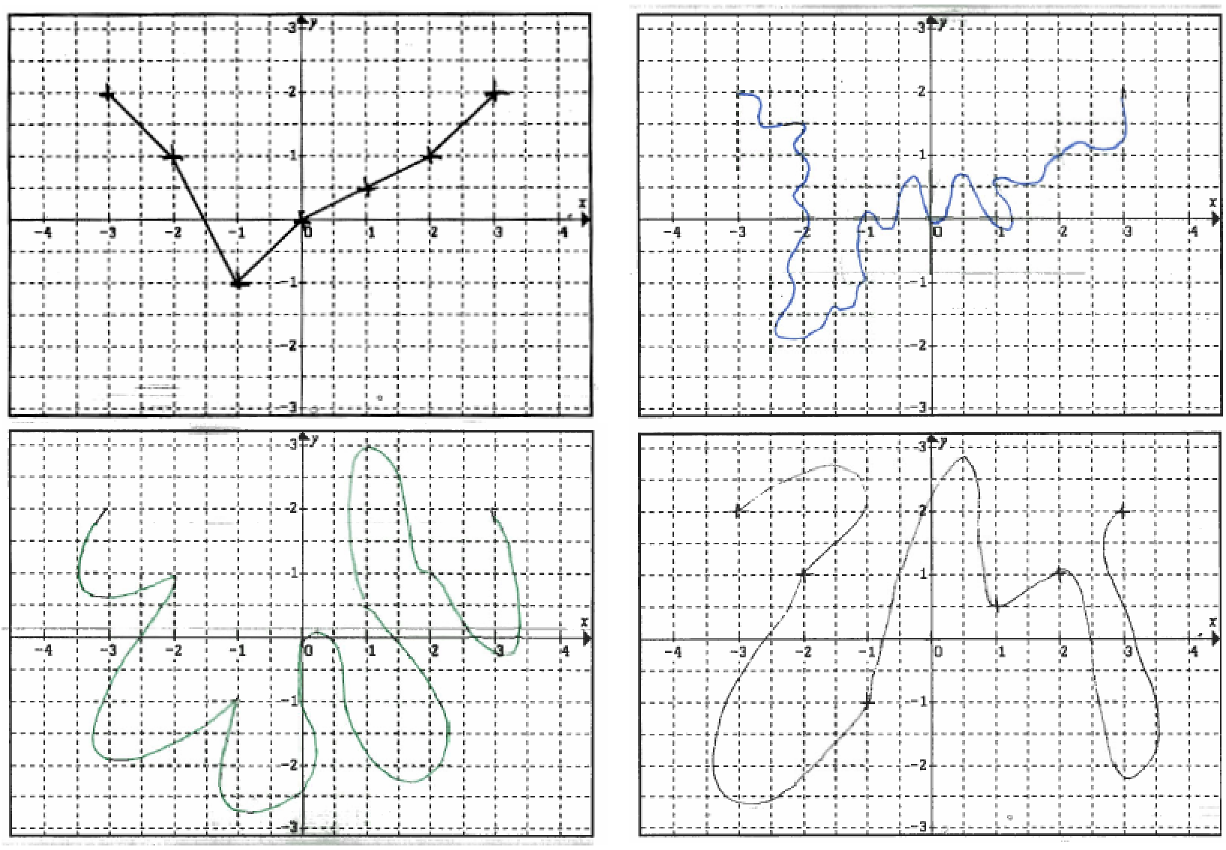
E27 : « oui, car seuls les points sont donnés »

Selon cette explication, nous pouvons dire qu'il a bien compris qu'à un tableau de valeurs peut correspondre plusieurs courbes, et il arrive à tracer des courbes librement, ce que confirme ce que cet élève a fait pour l'exercice 2.

*1c. Ceux qui tracent quasi systématiquement des courbes qui ne représentent pas une fonction (E1, E4, E17, E23, E26, E28)*

6 élèves se trouvent dans cette catégorie. Ils tracent des courbes qui ne correspondent pas à des fonctions (tracé de segments verticaux comme des créneaux, des courbes qui reviennent en arrière, qui font des boucles, etc). Ces élèves opèrent donc dans le registre dessin, entièrement dégagé des contraintes liées à la représentation d'une fonction.

Voici les courbes que E1 tracent comme réponse à la question 1b (la première courbe étant sa réponse à la question 1a) :



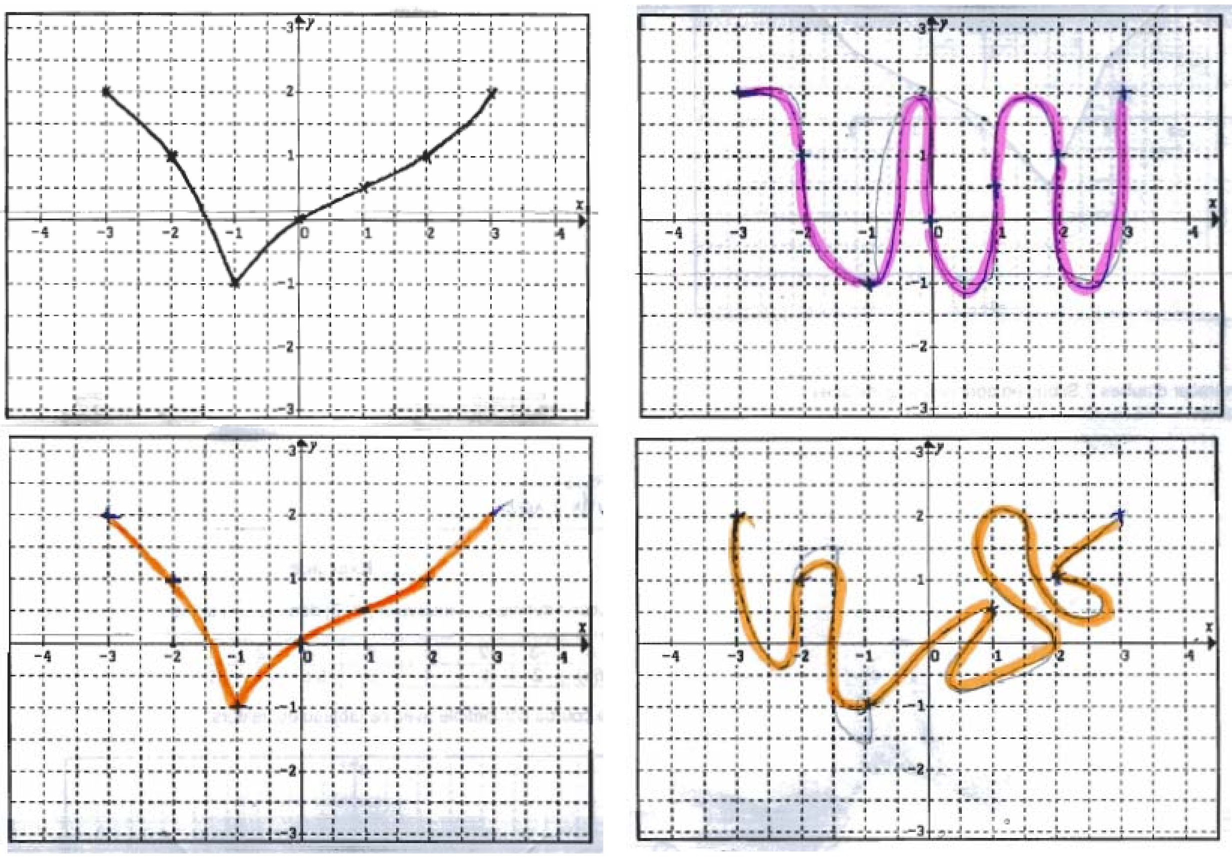
Ces élèves ne donnent aucune explication dans leurs réponses !

*__2. Plusieurs stratégies à l'œuvre__*

6 élèves utilisent au moins deux stratégies différentes pour tracer trois courbes. Nous détaillons leurs stratégies par le tableau suivant :

| **Elèves** | **1$^{ère}$ courbe** | **2$^{ème}$ courbe** | **3$^{ème}$ courbe** |
|---|---|---|---|
| E3 | Courbe « libre » | Courbe comme initiale | Courbe « libre » |
| E13 | Courbe « libre » | Courbe comme initiale | Courbe comme initiale |
| E21 | Courbe « libre » | Courbe « libre » | Courbe comme initiale |
| E16 | Courbe comme initiale | Courbe comme initiale | Pas celle d'une fonction |
| E15 | Courbe comme initiale | Pas celle d'une fonction | Pas celle d'une fonction |
| E19 | Courbe comme initiale | Courbe « libre » | Pas celle d'une fonction |

Voici la réponse de E19 pour ces questions :



A travers de cet exercice, contrairement à ce que nous avions vu dans le questionnaire des élèves, nous avons pu constater que les élèves étaient capables de tracer plusieurs courbes à partir d'un tableau de valeurs. Cependant une forte proportion d'élèves reste dans un registre qui serait plutôt celui du dessin et donc ne mobilise pas des connaissances sur les fonctions. Nous en concluons qu'il est important de travailler ces changements des registres.

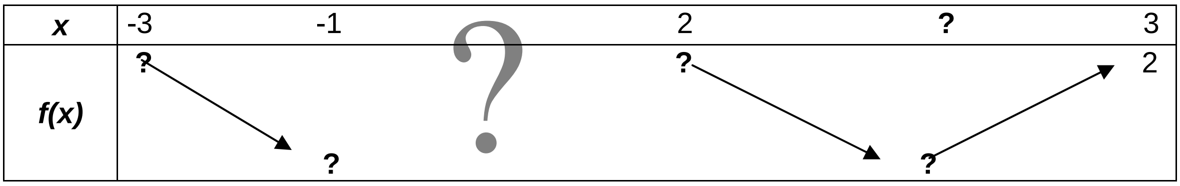
### II.1.2 Exercice 2

Rappelons tout d'abord le deuxième exercice qui est distribuée aux élèves, après avoir ramassé leurs réponses pour l'exercice 1.

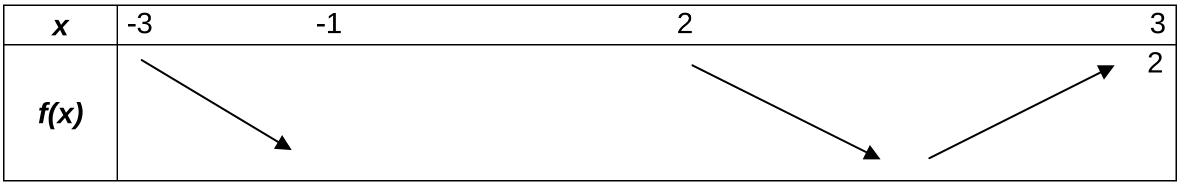
« Soit une fonction f définie sur l'intervalle [-3; 3] dont on connaît le tableau de valeurs suivant :

| ***x*** | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***f(x)*** | 2 | 1 | -1 | 0 | 0.5 | 1 | 2 |

**a.** Complétez le tableau de variations ci-dessous pour qu'il soit compatible avec ce tableau de valeurs.




Votre réponse :

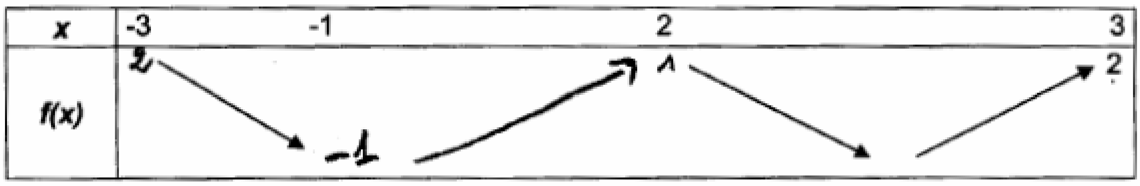



**b.** Y a-t-il d'autres façons de le compléter ? Si oui, lesquelles ?
Si non, expliquez ».

Nous avons distingué trois réponses différentes selon les termes de notre analyse a priori :

*1. La réponse « correspondance univoque entre tableau de valeurs et tableau de variations »*

9 élèves donnent ce type de réponse : ils complètent le tableau de variations selon les données du tableau de valeurs et seulement de celles-ci. Leur réponse indique que la fonction est croissante sur l'intervalle [-1 ; 2] (où nous avions mis un grand point d'interrogation). Voici le tableau de variations qu'ils donnent :




Une variabilité apparaît cependant pour ces 9 élèves dans leur façon de compléter la partie du tableau entre les valeurs 2 et 3 des abscisses. Trois types de réponses sont apparus :

*1a. Ceux qui n'ont rien précisé*

4 élèves (E2, E4, E11 et E24) n'ont rien précisé pour la partie entre 2 et 3. Deux d'entre eux disent « non » (E2) et « je ne sais pas » (E4) à la question b. Un autre précise « non car à chaque abscisse correspond à une seule ordonnée ». Ces trois élèves n'ont rien écrit sur les tableaux de variations données pour la question b.

Celui (E24) qui dit « je ne sais pas » trace au dos de la feuille une courbe simple lisse et s’appuie sur ce tracé pour dire qu’il n’y a qu’une possibilité, tout en restant incapable de gérer ce qui peut se passer entre 2 et 3. Bien sûr cet élève était dans la première catégorie (ceux qui ne tracent que des courbes légèrement différentes) dans l’exercice 1. On voit que cet élève a en fait besoin de passer par le tracé d’une courbe pour passer d’un tableau de valeurs à un tableau de variations, il est incapable de faire une conversion directe. De fait, n’ayant qu’un seul modèle de courbe correspondant à un seul tableau de variations, non compatible avec celui à compléter, il ne peut répondre à la question et se trouve incapable de gérer la contradiction.

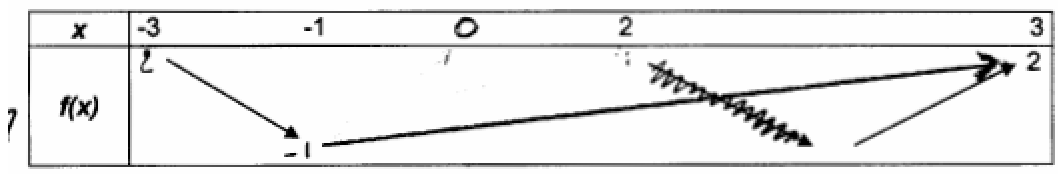
Un autre élève (E11) manipule les valeurs du tableau de valeurs qui n’apparaissent pas dans le tableau de variations donné et il les met sans faire attention au sens des flèches. Il ne précise pas le comportement entre 2 et 3.

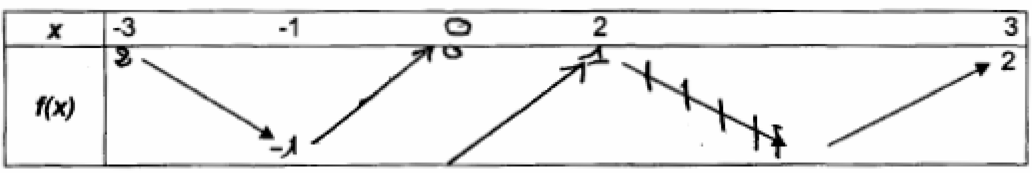
Ces réponses nous montrent que ces élèves n’arrivent pas à passer directement du tableau de valeurs au tableau de variations. Ils peuvent avoir besoin de passer par le tracé d’une courbe, mais même dans ce cas, ils n’arrivent pas à voir qu’entre deux valeurs du tableau de valeurs, il peut y avoir une grande variabilité. Ce résultat n’est pas vraiment étonnant car les élèves sont au début de l’apprentissage des fonctions et ne manient ce nouvel outil que constitue le tableau de variations que depuis peu de temps.Cependant, il nous semble intéressant de souligner à travers ces exemples combien les activités de conversion peuvent se révéler difficiles mais importantes du point des apprentissages sur les fonctions.

Remarquons que si trois de ces élèves n’ont tracé que des courbes proches de la courbe simple lisse dans l’exercice 1, E2 par contre a tracé des « courbes libres ». Pour cet élève, il semble donc que ce soit le lien entre le tableau de valeurs et le tableau de variations qui pose problème et que la courbe n’est pas envisagée comme un intermédiaire.

*1b. Ceux qui disent « non, ce tableau est faux !... »*

Il s’agit trois élèves (E1, E6, E9) qui disent que ce tableau de variations est faux car la fonction est croissante sur l’intervalle [-1 ; 3] selon les données du tableau de valeurs qu’ils reportent dans le tableau de variations. Certains élèves vont même jusqu’à barrer la flèche qui montre que la fonction est décroissante sur une partie de l’intervalle [2 ; 3]. Voici deux exemples qu’ils donnent comme réponse :



Ces élèves donnent les explications suivantes :

> E1 : « Je ne comprend pas la présence de la flèche (qui débute à 2 x) qui signifie que la courbe est décroissante alors qu'elle est croissante »
> E6 : « Je pense que ce tableau de valeurs est faux car entre l'intervalle [-1 ; 3], la ligne monte et reste continue donc pourquoi au point 2, la courbe descend ce qui est faux »
> E9 : « Le tableau est faux car la courbe de [-1 ; 3] est croissante »

E9 trace, en plus, une courbe simple lisse derrière sa feuille à partir des données du tableau de valeurs.

Ces réponses indiquent certainement que les élèves n'arrivent pas à envisager que la fonction puisse ne pas être monotone entre deux valeurs d'abscisses entières et ils ont du mal à abandonner certaines informations lors du passage au tableau de variations.

Pour l'exercice 1, E6 et E9 ont tracé des courbes ressemblantes à la courbe initiale et E1 a tracé des courbes qui ne représentent pas une fonction.

*1c. Ceux qui disent « on ne peut pas répondre à cette question… »*

Il s'agit de 2 élèves (E18, E20) qui disent qu'on ne peut pas compléter la partie entre 2 et 3, car on ne connaît pas la fonction. Voici leurs explications :

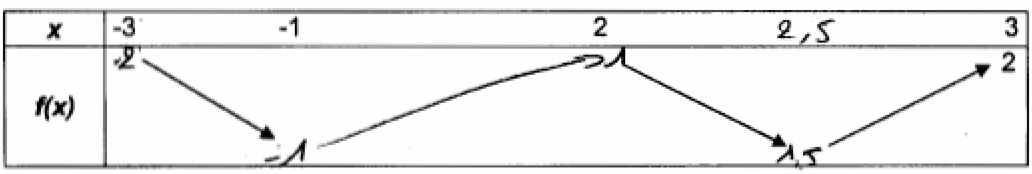
> E18 : « On n'a pas les données nécessaires pour compléter »
> E20 : « On ne peut pas remplir ce vide car on ne connaît ni x ni f(x) »

Pour la question b, E18, sans donner d'explication, rajoute des valeurs du tableau de valeurs qui n'apparaissent pas dans le tableau de variations et qui ne sont pas pertinentes. Par contre, E20 dit « *oui en regardant la courbe* » sans ajouter autre chose à sa réponse. Notons de plus que E20 a tracé des courbes « libres » pour l'exercice 1.

Les réponses de ces deux élèves semblent être une réaction à une tâche hors contrat, puisque, comme nous l'avons vu dans l'analyse des manuels, les valeurs sont calculées à partir d'une formule ou déterminées à partir d'une courbe. Inventer des valeurs qui ne sont pas produites par un calcul peut gêner les élèves qui avouent ainsi ne pas pouvoir répondre.

*2. Introduire dans l'intervalle [2 ; 3] le milieu des points (2 ; 1) et (3 ; 2)*

8 élèves introduisent dans l'intervalle [2 ; 3] le point de coordonnées (2.5 ; 1.5) milieu des points de coordonnées (2 ; 1) et (3 ; 2). Or ce point n'est pas conforme avec les variations de la fonction. Voici le tableau de variations qu'ils donnent comme réponse :



Il y a certainement là un effet de contrat relevant du numérique : les coordonnées de ce point doivent apparaître comme résultat d'un calcul (moyenne des coordonnées). De plus, comme nous l'avons déjà dit, cette question où il faut « inventer » les coordonnées d'un point est peu habituelle pour les élèves.

Par ailleurs, tous ces élèves donnent des réponses telles que la fonction est croissante sur l'intervalle [-1 ; 2] (où nous avions mis un grand point d'interrogation), sauf un élève (E13) qui n'a rien écrit sur cet intervalle et dit « *je ne sais pas car je ne comprends pas ce que je dois mettre à la place du grand point d'interrogation. Un chiffre ou une flèche ?* ».

*Leurs réactions pour la question b ;*

Deux élèves (E16, E25) gardent la même idée et ils choisissent des valeurs toujours comprises entre 2 et 3 pour les abscisses et entre 1 et 2 pour les ordonnées :

E16 ne change que les ordonnées et il choisit les valeurs « 1.75 » et « 1.90 » et il garde l'abscisse « 2.5 » et les autres parties du premier tableau de variations. E25 change en même temps les abscisses et les ordonnées et il choisit les points (2.1 ; 1.9) et (2.7 ; 1.2) en gardant les autres parties du premier tableau de variations.

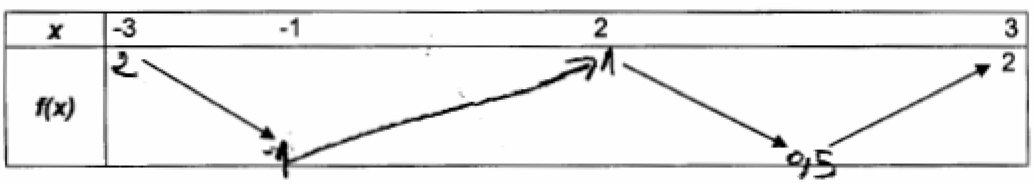
Un élève (E17) change les abscisses et les ordonnées mais les valeurs qu'il choisit ne sont plus comprises entre 2 et 3 pour les abscisses et entre 1 et 2 pour les ordonnées. Il introduit aussi des points sur l'intervalle [-1 ; 2]. Par contre aucune des valeurs qu'il a choisies ne respecte le sens des flèches voire même l'ordre des abscisses.

Cinq d'entre eux (E5, E8, E12, E13, E19) ne répondent pas à la question b.

Ces élèves, comme les précédents, travaillent essentiellement dans le registre numérique, pour eux compléter le tableau de variations revient à intercaler des nombres dans celui-ci et les flèches ont encore un sens obscur.

*3) le valeur « 0.5 » comme ordonnée… !*

5 élèves (E7, E10, E14, E22, E28) introduisent la valeur « 0,5 » comme ordonnée dans l'intervalle [2 ; 3]. Trois d'entre eux ne précisent pas la valeur de l'abscisse correspondante dans cet intervalle et les deux autres mettent « 2,5 » comme abscisse. Voici le tableau de variations correspondant à ce type de réponse :




*Leurs réactions face à la question b :*

Un élève (E14) continue à mettre la valeur « 0.5 » en reportant les autres valeurs du tableau de valeurs.

Un élève (E10) change les points dans l'intervalle [2 ; 3] sans respecter l'ordre des abscisses et le sens des flèches qu'il utilise. Il rajoute également des valeurs dans l'intervalle [-1 ; 2] qui ne respectent plus le sens des flèches.

Les trois autres élèves n'ont rien ajouté dans les tableaux de variations donnés et un d'entre eux (E22) dit « *oui, je pense qu'il y a d'autre possibilités car il y a plusieurs possibilités de courbes* » et il trace une courbe lisse à l'arrière de la feuille. D'autre part, ce même élève a tracé des courbes « libres » pour l'exercice 1b. On voit donc que s'il a bien intégré la liberté que laisse un tableau de valeurs pour le tracé d'une courbe, il ne maîtrise encore pas suffisamment les tableaux de variations pour avoir cette même liberté, qu'il est toutefois capable d'envisager, même s'il ne peut la mettre en œuvre.

Finalement 22 élèves sur 28 n'arrivent pas à donner un tableau de variations compatible au tableau de valeurs donné. Ceci montre que le tableau de variations en tout début d'apprentissage reste un objet problématique que les élèves ont du mal à manier. Si certains de leurs blocages étaient déjà visibles ou prévisibles à la question 1, certains élèves montrent des difficultés bien spécifique aux tableaux de variations alors qu'ils avaient été capables de gérer plutôt bien le rapport entre tableau de valeurs et courbe à la question 1.

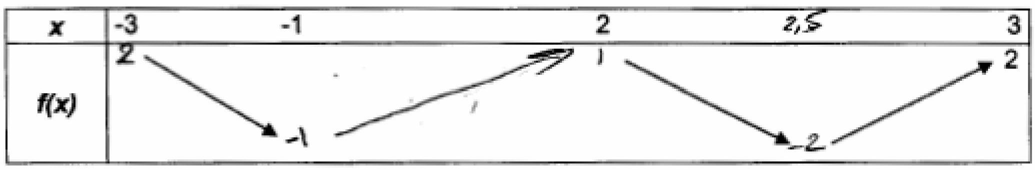
*4. Réponses correctes*

6 élèves arrivent à donner une réponse compatible avec le tableau de valeurs, tous choisissent la valeur « 2.5 » comme abscisse dans l'intervalle [2 ; 3]. Ils choissent en général les valeurs « 0,5 », « 0 », « -1 », « -2 » et « -3 » comme ordonnées de l'abscisse « 2,5 ». Les valeurs « -4 » et « -10 » sont apparues, chacune, par un élève.

Nous pouvons distinguer deux types de réponse selon leur façon de compléter la partie du tableau entre les valeurs -1 et 2 des abscisses :

*4a. Sans introduire de nouvelle variation dans [-1 ; 2]*

Quatre élèves (E3, E21, E23, E27) n'introduisent pas de nouvelle variation dans l'intervalle [-1 ; 2], ceci reste valable pour leurs réponses à la question b. Voici un des tableaux de variations donnés dans cette catégorie :




E3 choisit le point (2.5 ; 0) pour la question a) et il reporte toutes les valeurs du tableau de valeurs. Par contre, pour la question b), il dit « non il n'y a pas d'autres façons de le compléter car le tableau de variations ci-dessous donne le sens de variation ».

E21 choisit d'abord le point (2.5 ; 1.5) dont les coordonnées sont les moyennes de (2 ; 1) et de (3 ; 2), ce qui n'est pas compatible avec le tableau de variations. Ensuite il fait une correction en disant « erreur : on ne peut pas descendre vers (2.5 ; 1.5) » puis il choisit le point (2.5 ; 0).

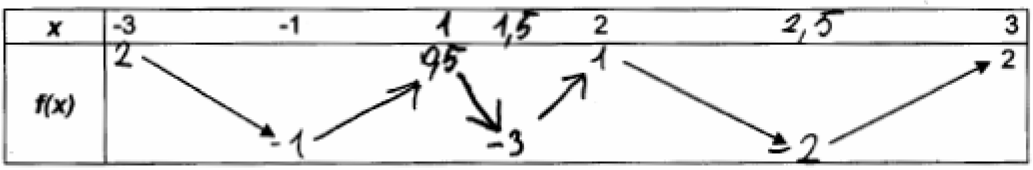
Pour la question b, il répond ainsi « on peut le compléter d'autre façon en changeant (2.5 ; 0) mais l'abscisse doit rester entre 2 et 3 et l'ordonné inférieure à 1 ».

E23 garde toujours la valeur « 2.5 » comme abscisse et il choisit les valeurs « 0 » et « -3 » comme ordonné dans l'intervalle [2 ; 3]. Par contre, pour la question b, il change aussi les autres valeurs à compléter, qui ne sont plus compatibles avec le tableau de valeurs.

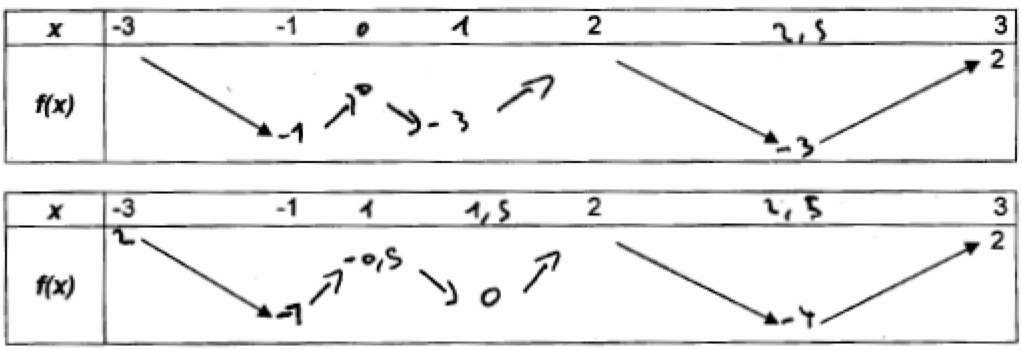
E27 choisit d'abord le point (2.5 ; -2) dans l'intervalle [2 ; 3] et ensuite il change chaque fois, pour la question b, les abscisses et les ordonnées et il choisit ainsi les points (2.1 ; -10) et (2.9 ; 0.5).

*4b. Introduire une variation supplémentaire dans [-1 ; 2] dès le début :*

Il s'agit de 2 élèves (E15, E26). Tous les deux introduisent une nouvelle variation en utilisant, chacun, les points (1,5 ; -3) et (1,5 ; -2). Voici le tableau de variations proposé par  E15 pour la question a :




Pour la question b, ils continuent à introduire une nouvelle variation dans l'intervalle [-1 ; 2], par contre E26 change les autres valeurs à compléter, qui ne sont plus compatibles avec le tableau de valeurs. Voici un de deux tableaux de variations qu'il a proposé :




## II.1.3 Troisième étape: retour en arrière

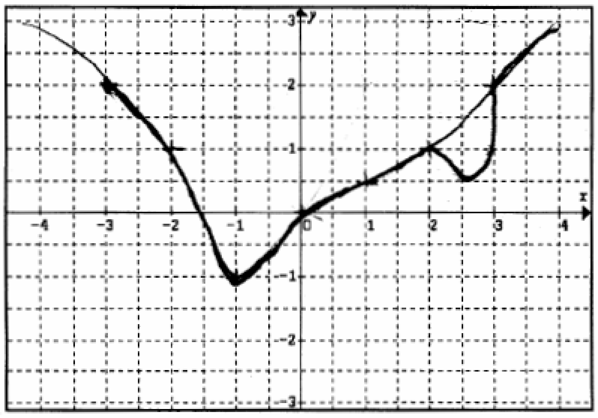
Nous rappelons tout d'abord que le professeur a redistribué aux élèves leurs réponses à l'exercice 1 sans ramasser l'exercice 2 en leur disant : « *donc voilà vous avez répondu à l'exercice 2, je vous redonne l'exercice 1, si vous voulez modifier vos réponses faites-le en utilisant une autre couleur et sans effacer  votre première réponse* ».

Nous avions prévu en effet cette étape de « retour en arrière », en pensant au vu de notre test, que la plupart des élèves auraient répondu qu'il n'y avait pas qu'une courbe possible à l'exercice 1 compatible avec le tableau de valeurs donné. Dans ce sens, l'exercice 2 était fait pour faire émerger l'idée qu'à un tableau de valeurs peut correspondre plusieurs tableaux de variations et donc plusieurs représentations graphiques.

Or comme nous l'avons vu, contrairement à ce que nous avions cru, tous les élèves ont spontanément tracé plusieurs courbes en réponses à l'exercice 1, alors qu'ils ont majoritairement rencontré des difficultés dans l'exercice 2. Ainsi le retour en arrière prévu n'a pas pu jouer son rôle.

Seulement, 3 élèves (E23, E27 et E28) ont fait une modification dans leur réponse pour l'exercice 1. Ces trois élèves, qui avaient correctement répondu à la question 2 (et représentent la moitié de ceux-ci), modifie seulement la première courbe qu'ils avaient donnée de façon à la rendre compatible avec le premier tableau de variations qu'ils viennent de compléter. Ceci renforce l'impression que les élèves, même s'ils donnent plusieurs réponses aux questions 1b et 2b, par conformité à la consigne, ont tendance à penser qu'il existe UNE bonne réponse.

Voici la modification de E28 qui est fait pendant la troisième étape « retour en arrière » :




Pour les autres élèves ce retour en arrière a semblé inutile et ils n'ont rien modifié, ce qui n'est pas surprenant au vu de leurs réponses aux questions précédentes.

Cette activité s'est achevée par une mise en commun assez brève. Suite à nos problèmes techniques, nous ne sommes malheureusement pas en mesure d'en rendre compte.

## II.2 Expérimentation de cette activité dans une autre classe

Nous avons expérimenté à nouveau cette activité dans une autre classe quelques semaines plus tard. Dans cette classe, le chapitre « fonction » avait été entièrement étudié avant notre expérimentation (y compris le chapitre sur les fonctions de référence), contrairement à la classe précédente qui en était au contraire au tout début du premier chapitre. Cette différence sera bien entendu de nature à modifier les résultats, il sera en particulier intéressant de voir la prégnance des difficultés liées au codage dans un tableau de variations, dont nous avons supposé dans l'analyse qui précède, qu'elles étaient certainement des erreurs de débutants.

### II.2.1 Présentation et déroulement de l'activité

La professeure a expliqué, après avoir distribué l'exercice 1 aux élèves :

> Alors, c'est un premier exercice donc …, soit une fonction f définie sur l'intervalle [-3 ; 3] dont on connaît le tableau de valeurs suivant, donc voilà, tracer une courbe compatible avec ce tableau de valeurs. Donc, vous avez un repère pour tracer votre courbe. On vous demande ensuite de répondre à une autre question : Peut-on en tracer d'autres ? Si oui, utilisez le dos de la feuille pour donner votre réponse. Si non, expliquez. Donc voilà vous devez répondre à toutes ces questions et vous avez deux pages pour ça et vous avez un quart heure.

On voit donc que la professeure est resté très neutre, en particulier pour la question b, elle n'a pas privilégié l'une ou l'autre des réponses.

Les élèves ont travaillé seuls pendant 15 minutes. Pendant ce temps, deux questions ont été posées de façon à être entendues par toute la classe (ainsi que la réponse de l'enseignante) par deux élèves différents. Voici ces deux questions avec leurs réponses :

> E1 : Madame, si on peut en tracer d'autres il faut donner des explications ?
> P : Si tu penses qu'on peut en tracer d'autres, tu peux expliquer pourquoi tu vas tracer d'autres et surtout tu essaies de tracer sur le dos de cette feuille. Et si vous pouvez pas en tracer d'autre c'est pareil vous expliquez pourquoi.

Encore une fois on peut noter le souci de l'enseignante de ne pas privilégier dans ses interventions, l'une ou l'autre des réponses à la question b.

> E2 : Pour donner d'autres courbes, est-ce que cela, on peut faire en changeant la forme de la courbe ou en mettant d'autres points ?
> P : Pour l'instant, je ne peux pas répondre à cette question.

On peut s'interroger sur la signification de cette question. Le choix de l'enseignante de ne pas y répondre collectivement est judicieux, car cela aurait pu entraîner la classe dans un débat assez long dont beaucoup n'auraient pas vu la nécessité. On peut penser que derrière cette question, l'élève s'interroge sur le sens de l'expression « courbe différente » : est-ce que quelques petites modifications de courbures sont suffisantes pour dire que la courbe est différente ? Ou bien faut-il des choses plus visibles. Il se peut aussi que cet élève soit persuadé qu'ils n'existe qu'une courbe possible et qu'il ne voit pas d'autre moyen de faire différent qu'en changeant les valeurs du tableau.

La professeure, après avoir ramassé les réponses à l'exercice 1, a distribué l'exercice 2, avec le commentaire suivant :

> Alors l'exercice numéro 2, soit une fonction f définie sur l'intervalle [-3 ; 3] dont on connaît le tableau de valeurs suivant. Compléter le tableau de variations ci-dessous pour qu'il soit compatible avec ce tableau de valeurs. Pas de souci au niveau de la question ça va ? Le vocabulaire ? Donc vous devez mettre votre réponse dans la partie votre réponse.
> La question b, *Y a-t-il d'autres façons de le compléter* ce tableau de variations*? Si oui, lesquelles?* A ce moment là, vous les donnez au-dessous. *Si non, expliquez,* pourquoi vous n'avez pas d'autre possibilité. Vous avez compris ce qu'il faut faire ? Oui ? Bon alors, vous commencez à répondre. ».

Les élèves ont répondu individuellement à cet exercice pendant une quinzaine de minute. Aucun élève n'a posé de question pendant ce temps-là. Quand les élèves ont eu terminé de répondre à l'exercice 2, la professeure a redistribué aux élèves leurs réponses pour l'exercice 1, sans ramasser l'exercice 2, en leur disant :

> Alors je vous redistribue la première feuille et si vous avez des choses à ajouter ou à modifier c'est le moment sur la première feuille mais avec une autre couleur. Vous n'effacez surtout pas ce que vous aviez mis tout à l'heure vous le laissez. Vous pouvez barrer à la rigueur ou rajouter comme vous voulez, mais vous ne l'effacez pas.

Pendant cette étape de retour, aucun élève n'a posé, non plus, de question. La professeure a distribué, pour chaque étape, des transparents à certains élèves en vue de la mise en commun.

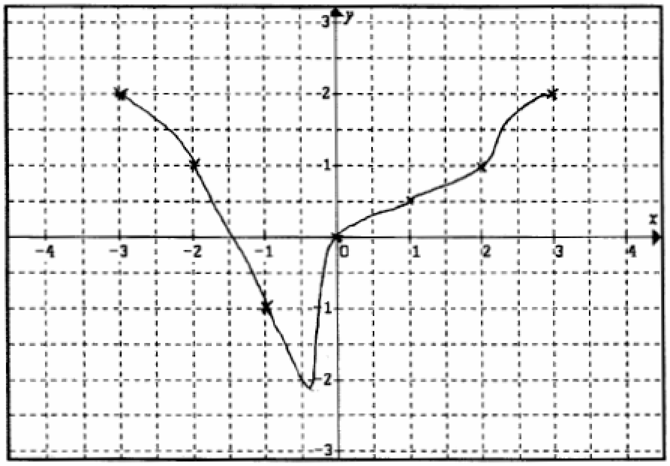
On voit dans ce déroulement que l'enseignante est restée très neutre. Son rôle s'est borné à lire à haute voix les consignes et à s'assurer qu'elles étaient chaque fois bien comprises. Une coutume de la classe est que pendant ces phases de recherche, les élèves qui ont des questions doivent les poser à haute voix de façon à ce qu'elles soient entendues de tous. L'enseignante reste disponible mais ne va pas au devant des élèves. Il est à noter que ce temps de recherche s'est déroulé de façon studieuse et silencieuse. L'enseignante a également géré le temps de façon très stricte.

Voici l'analyse de leurs réponses ;

### II.2.2 Exercice 1

*Question a*

Comme dans la classe précédente, tous les élèves tracent en premier lieu une courbe « simple lisse » ou « rectiligne » sauf un élève (E21). Celui-ci introduit une minimum entre [-0.5 ; 0]. Voici la courbe que cet élève (E21) a tracée pour cette question :



*Question b*

2 élèves (E4 et E5) disent qu'on ne peut pas tracer d'autre courbe. Ils donnent par écrit les explications suivantes :

> E4 : « Non, car une image n'a qu'un seul point de coordonnée sur une courbe et on ne peut pas changer les donnés dans le tableau de valeurs »
> E5 : « On ne peut pas tracer d'autres courbes, car chaque valeur de x ou chaque image a un seul antécédent ».

Nous retrouvons ici un type de réponse très représentée dans notre questionnaire. Ces élèves sont influencés par le fait qu'on insiste beaucoup en début de Seconde sur l'unicité de l'image pour une valeur de x donné ce qui les induit à penser qu'il n'existe pas d'autre courbe.

Nous avons catégorisé les réponses des autres élèves selon l'analyse a priori. Notons que tous les élèves tracent trois courbes pour cette question, sauf deux élèves qui en tracent respectivement deux et une seule.

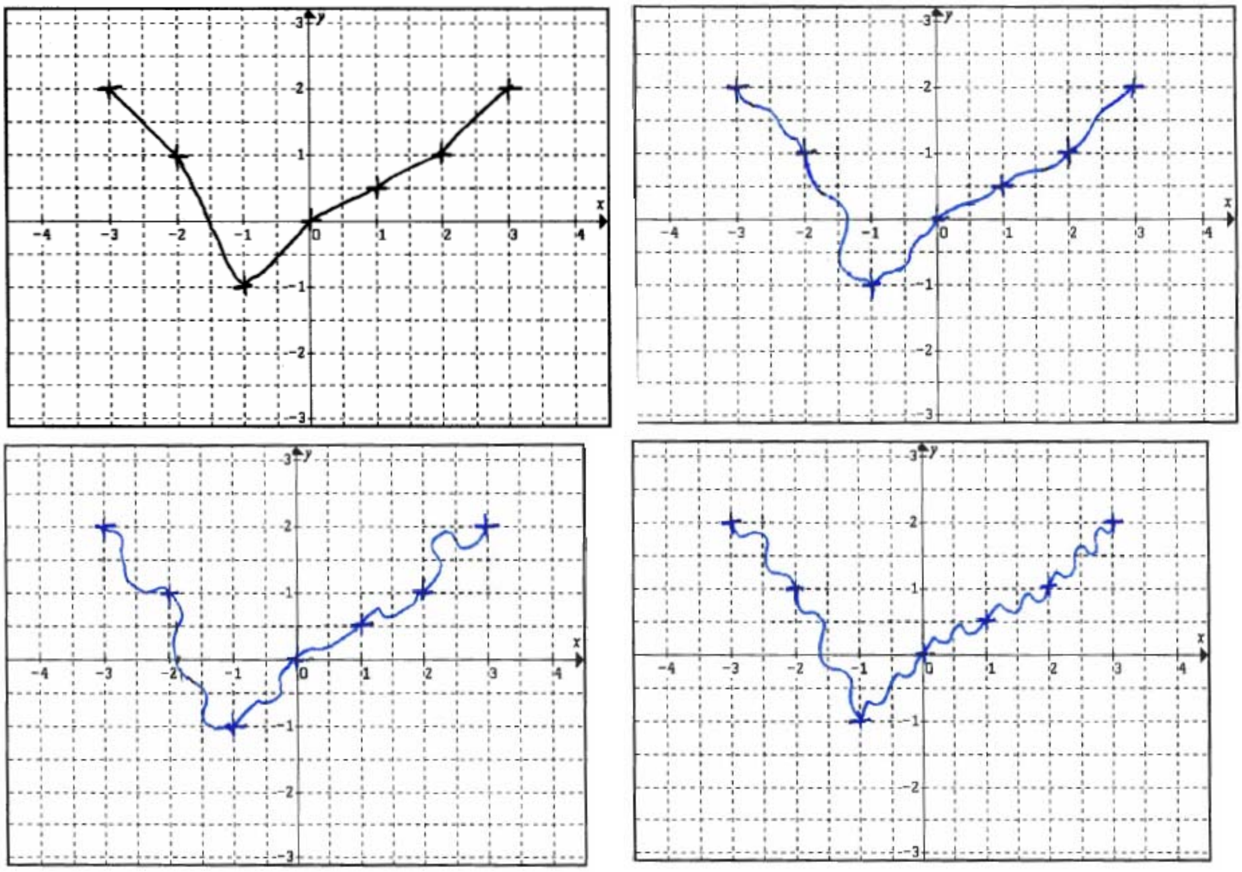
*1. Persistance d'une stratégie dominante*

22 élèves (sur 28) se placent toujours dans une même stratégie chaque fois qu'ils tracent une nouvelle courbe.

*1a. Ceux qui tracent toujours des courbes ressemblantes à la courbe initiale.*
*(E3, E6, E13, E14, E19)*

5 élèves se trouvent dans cette catégorie. Ils tracent chaque fois des courbes en faisant un léger changement sur une partie ou sur toute la courbure de la courbe initiale en gardant sa globalité. C'est donc la courbe initiale qui guide le tracé de ces courbes et les extrema de la courbe initiale sont conservés. Dans cette catégorie, certains élèves, en faisant des virages un peu plus accentués, à partir de la courbe initiale, tracent des « courbes vagues », selon les termes de notre analyse a priori.

Voici la réponse de E3 pour ces deux questions :



Certains d’entre eux donnent par écrit les explications suivantes (certainement influencés par la question de leur camarade et la réponse de l’enseignante) :

> E3 : « Oui on peut en tracer une infinité car on ne nous donne pas le sens de variation de f ».
> E6 : « La forme varie. Mais cette question est trop vague. On a une infinité de possibilités : forme, points, je ne vois pas où vous voulez en venir ».
> E13 : « Il y a plusieurs possibilités : en gardant ces mêmes points, la courbe peut avoir différentes formes (entre ces points) ».
> E14 : « Oui on peut en tracer d’autres car on ne connaît pas les autres points ni le sens de variation ».

Ces explications nous montrent que ces élèves ont conscience qu’on peut tracer d’autres courbes et que la forme peut varier entre deux valeurs du tableau. Contrairement aux élèves de la première classe (qui ne l’avaient pas encore vu), ceux-ci évoquent très souvent explicitement l’idée de variations différentes, mais seulement entre deux points du tableau de valeurs. En effet, ils n’arrivent pas à sortir de l’influence de la courbe initiale et restent toujours dans la même stratégie. En particulier, toutes leurs courbes correspondent au même tableau de variations et les points fixés par les données du tableau de valeurs restent les seuls extrema possibles.

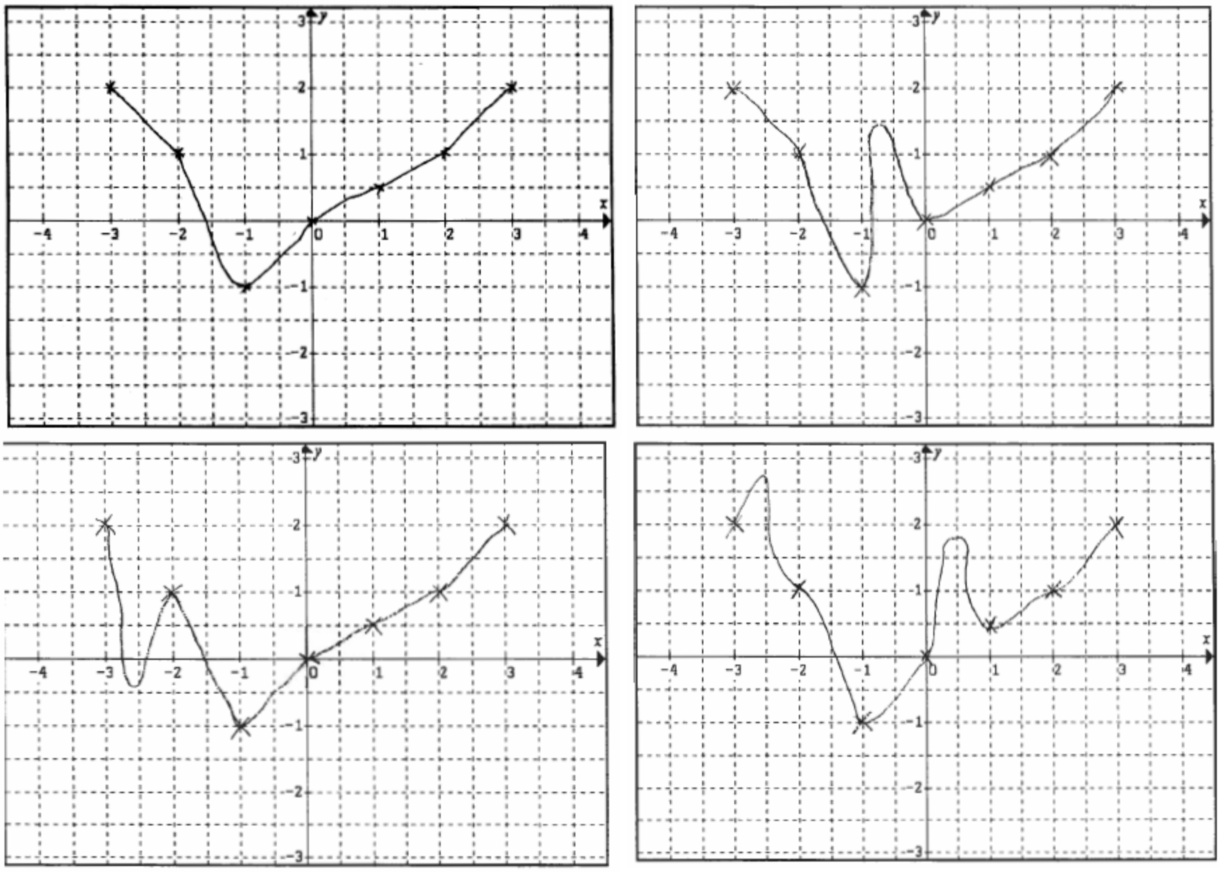
Il y a bien une évolution des réponses de ces élèves, repérable notamment au niveau du vocabulaire, mais celle-ci reste limitée puisque les élèves n’arrivent à changer radicalement la forme de la courbe.

*1b. Ceux qui tracent toujours des courbes en introduisant un nouvel extremum (E8, E9, E20, E21, E25, E26)*

6 élèves se trouvent dans cette catégorie. Ils tracent chaque fois des courbes en changeant « profondément » la courbe initiale seulement entre deux points successifs du tableau de valeurs pour n'introduire qu'un nouvel extremum (parfois deux).

Comme nous avons précisé au début de cette activité, le seul élève (E21) qui a tracé une courbe en introduisant un nouvel extremum pour la question a, se trouve aussi dans cette catégorie.

Voici la réponse d'un élève (E9) de cette catégorie :




Certains d'entre eux donnent par écrit les explications suivantes :

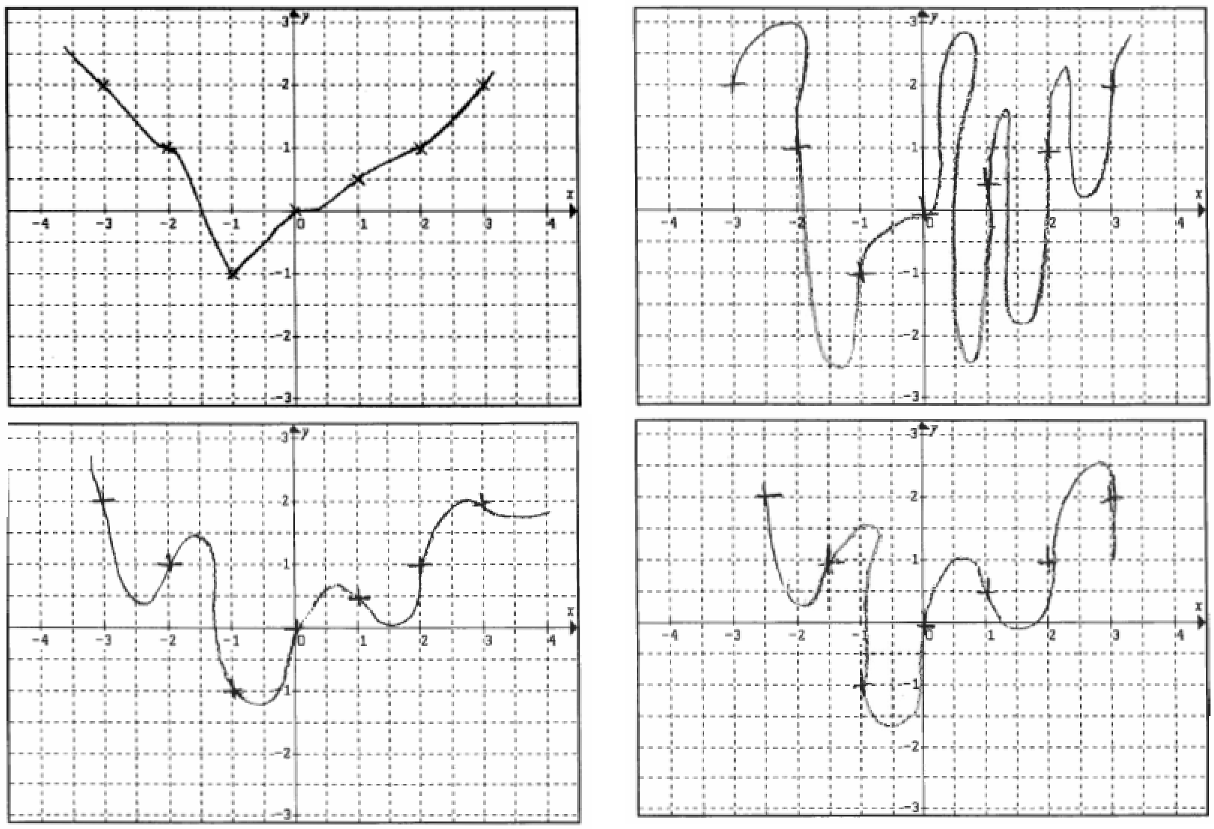
> E8 : « On ne peut pas savoir si entre 2 valeurs de x connues les images de x augmentent ou baissent ».
> E25 : « On peut tracer des milliers de courbe car on ne nous précise pas quand la fonction f est croissante ou décroissante ».
> E26 : « On peut tracer des milliers de courbe car on ne nous précise pas quand la fonction f est croissante ou décroissante ».

Il est remarquable que tous les élèves faisant des commentaires, se réfèrent au sens de variation ou la croissance/décroissance, ce qui était absent des réponses des élèves de la première classe, qui venaient juste de voir ces notions. Par ailleurs, il semble, à travers ce que les élèves tracent et leurs explications, que ces élèves ont clairement pris conscience que entre deux valeurs successives du tableau de valeurs la fonction peut changer de sens de variation. L'exercice 2 va nous permettre de vérifier la solidité des connaissances des élèves sur les tableaux de variations.

*1c. Ceux qui tracent toujours des courbes « libres »*
*(E7, E11, E12, E15, E17, E27, E28)*

7 élèves se trouvent dans cette catégorie. Ils tracent des courbes « libres », se dégageant ainsi de la contrainte implicite de choisir les extrema de la fonction parmi les points donnés dans le tableau de valeurs. Cependant, comme dans la classe précédente, certains élèves semblent se situer dans le registre « dessin », oubliant les contraintes liées à de la représentation d'une fonction ; Ainsi certains tracent des courbes qui sont à la limite de la représentation d'une fonction, soit parce qu'elles ne respectent pas l'intervalle de définition, soit parce qu'elles « reviennent en arrière », autrement dit ne respectent plus l'unicité de l'image.

Voici la réponse d'un élève (E7) de cette catégorie :



Un d'entre eux donne par écrit l'explication suivante :

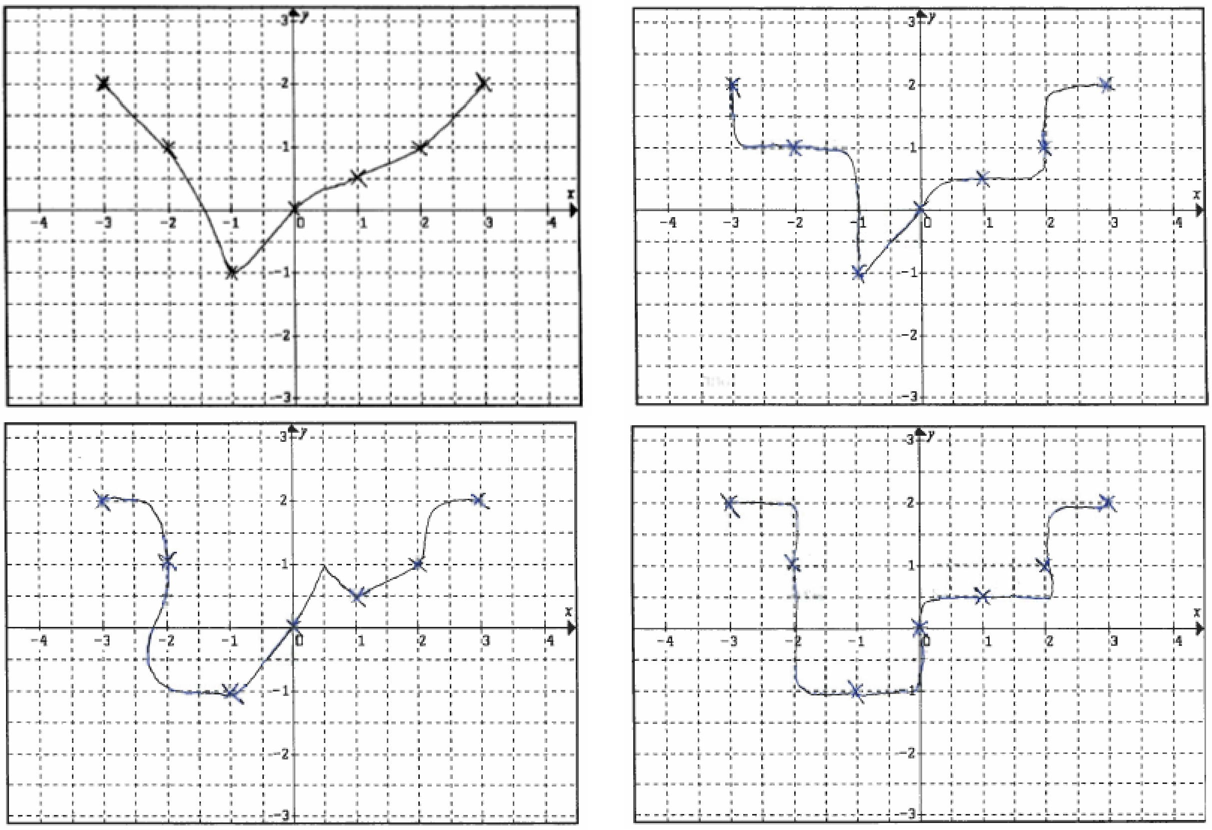
> E7 : « On peut tracer d'autres courbes. En effet, une fonction f peut comporter un carré ; dans ce cas là, 2 valeurs de x sont possibles. De plus, la forme de la courbe, avec la, présence de même abscisse et de même ordonnée, la forme de la courbe peut changer (sic)».

Hormis la référence à la fonction carrée, la réponse de cet élève reste assez obscure !

*1d. Ceux qui tracent quasi systématiquement des courbes qui ne représentent pas une fonction (E1, E16, E18, E29)*

4 élèves se trouvent dans cette catégorie. Ils tracent des courbes qui ne correspondent pas à des fonctions (tracé de segments verticaux comme des créneaux, des courbes qui reviennent en arrière, qui font des boucles, etc.). Ces élèves opèrent donc dans le registre dessin, entièrement dégagé des contraintes liées à la représentation d'une fonction. Un d'entre eux (E29) trace une seule courbe.

Voici la réponse d'un élève (E1) de cette catégorie :



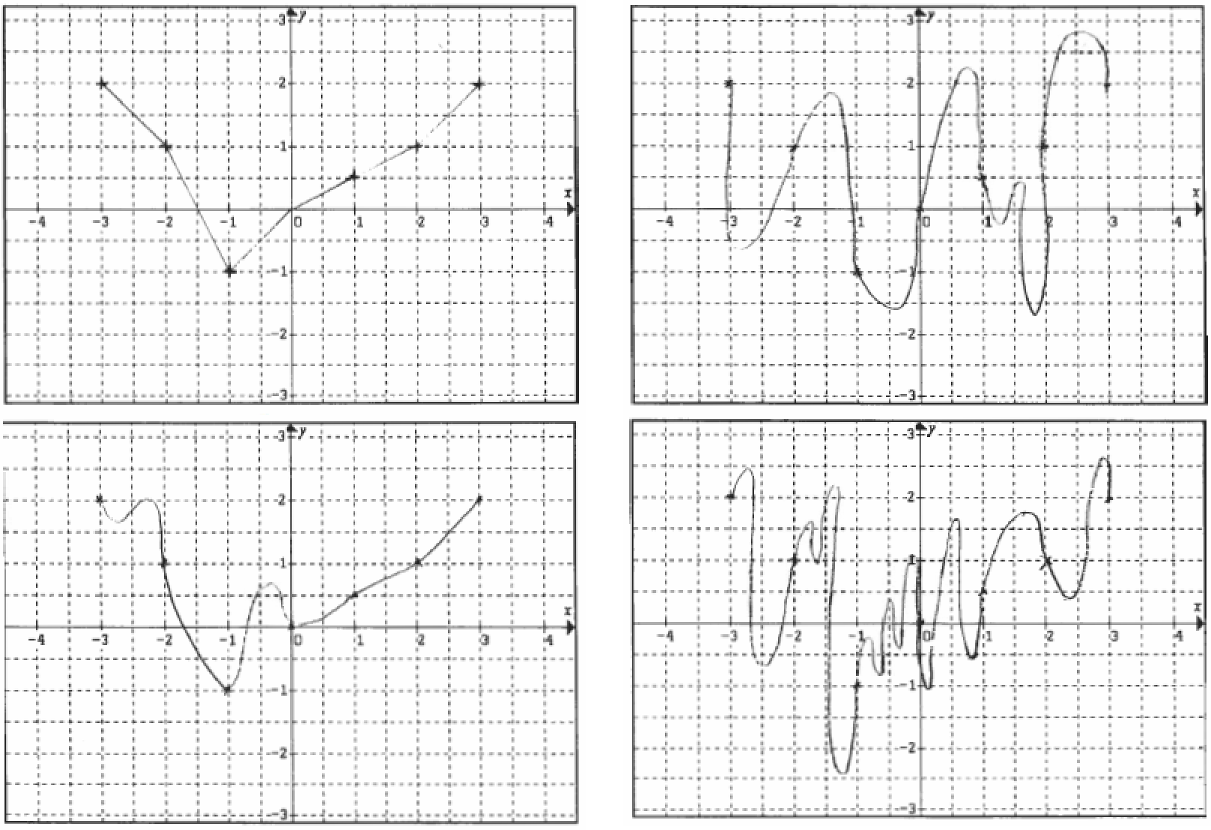
Ces élèves ne donnent aucune explication dans leurs réponses !

<u>*2. Plusieurs stratégies à l'œuvre (E2, E10, E22, E23, E24, E30)*</u>

6 élèves utilisent au moins deux stratégies différentes et tous tracent trois courbes. Nous détaillons leurs stratégies dans le tableau suivant :

| **Elèves** | **1ère courbe** | **2ème courbe** | **3ème courbe** |
|---|---|---|---|
| E2 | Introduire un nouvel extremum | Courbe « libre » | Courbe comme initiale |
| E10 | Pas celle d'une fonction | Pas celle d'une fonction | Courbe comme initiale |
| E22 | Introduire un nouvel extremum | Courbe « libre » | Courbe « libre » |
| E23 | Courbe comme initiale | Courbe « libre » | Courbe « libre » |
| E24 | Courbe comme initiale | Courbe « libre » | Courbe « libre » |
| E30 | Courbe comme initiale | Courbe « libre » | Courbe « libre » |

Voici la réponse d'un élève (E22) de cette catégorie :



Certains d'entre eux donnent par écrit les explications suivantes :

> E2 : « Oui, on peut en tracer une infinité de différentes, puisque l'on ne nous donne pas de tableau de variations, entre deux abscisses données, on ne sait pas quelle forme elle a ».
> E23 : « On peut en tracer à l'infini, car on ne précise pas les positions de toutes les points de la courbe ».

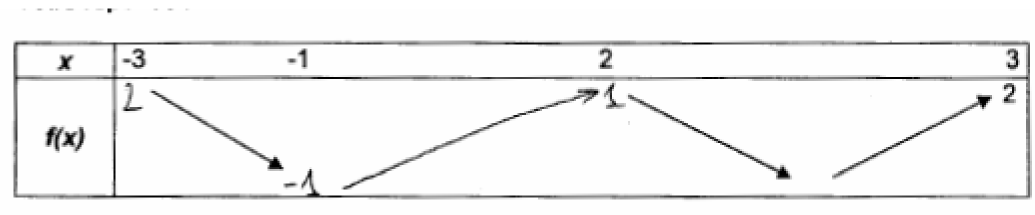
Si la réponse de E2 fait encore référence aux variations, la réponse de E23 est plus originale, vu que cet élève a tracé deux courbes libres, on peut penser qu'il a très bien compris la relation qui lie un tableau de valeurs et la diversité des courbes qui peuvent lui correspondre. Ce qui prime chez lui c'est le fait qu'un tableau de valeurs n'est pas plus que la donnée d'un petit nombre de valeurs qui laisse une grande marge de manœuvre.

### II.2.3 Exercice 2

Nous avons distingué trois réponses différentes selon notre analyse a priori :

*1. La réponse « correspondance univoque entre tableau de valeurs et tableau de variations »*

9 élèves (E1, E4, E5, E6, E7, E21, E22, E25, E26) donnent ce type de réponse : ils complètent le tableau de variations selon les données du tableau de valeurs et seulement de celles-ci. Leur réponse indique que la fonction est croissante sur l'intervalle [-1 ; 2], sauf deux d'entre eux (E6, E7) qui n'indiquent pas le sens de variation de la fonction dans cet intervalle. Voici le tableau de variations qu'ils ont donné :




Nous précisons que ces élèves n'ont rien précisé, non plus, pour l'intervalle entre 2 et 3 dans leurs réponses à la question 2b.

Une variabilité apparaît cependant pour ces 9 élèves dans leur façon de traiter l'exercice 2b. Deux types de réponse sont en effet apparus.

*1a. Ceux qui n'ont rien précisé sur les tableaux de variations donnés*

6 élèves (E4, E5, E6, E7, E21, E22) n'ont donné aucun autre tableau à la question b, avec les explications suivantes (sauf E4 qui ne précise rien) :

> E5 : « Non, il n'y a pas d'autre façon, car le premier tableau est impossible ».

On retrouve la réponse vue dans l'autre classe à savoir que cet élève ne voit que la correspondante directe entre deux tableaux et qu'il utilise le tableau de valeurs comme un tableau de variations. Il n'arrive donc pas à envisager que la fonction puisse ne pas être monotone entre deux valeurs d'abscisses entières. D'ailleurs, cet élève n'arrivait pas à tracer d'autre courbe, après avoir tracé une courbe « lisse », dans l'exercice 1 où il disait « on ne peut pas tracer d'autre courbe, car chaque valeur de x ou chaque image a un seul antécédent ».

> E6 : « Nous avons que certaines valeurs de x donc il faut respecter ces valeurs, mais entre ces différents x, il y a plusieurs valeurs, que je ne connais pas. De plus, entre -1 et 2 je ne peut pas savoir le sens de variation, de même entre 2 et 3 je ne peux pas deviner quel x représente ? ».
> E7 : « Je ne sais pas répondre à cette question car nous nous donnons que certaines valeurs de x ; de plus on ne nous donne pas le tracé de la courbe. La fonction peut être croissante de [-1 ; 1] et décroissante de [1 ; 2] ».
> E21 : « Non, car il s'agit ici de remplir ce tableau mais les données du tableau on ne peut pas changer ces données. On ne peut pas changer le tableau de variations ».
> E22 : « On ne peut pas compléter d'une autre façon car on peut mettre plusieurs chiffres dans l'intervalle [2 ; 3]. De plus, le tableau ne fournit pas assez d'élément : on ne connaît pas le sens de variation de l'intervalle [2 ; 3] ».

Les explications de ces élèves semblent être une réaction à une tâche hors contrat, puisque, comme nous l'avons vu dans l'analyse des manuels, le tableau de variations est en général établi à partir d'une formule ou d'une courbe. Inventer des valeurs qui ne sont pas produits par un calcul ou lues sur un graphique peut gêner les élèves qui avouent ainsi ne pas pouvoir répondre. Ces élèves montrent ainsi un certain degré de compréhension, mais n'ont pas encore une maîtrise suffisante du tableau de variations pour répondre correctement. De plus, ils peuvent être arrêtés par l'idée plus ou moins explicite qu'il n'y a qu'une bonne réponse et qu'ils manquent d'éléments pour LA trouver (cf. en particulier E21)

Nous rappelons que ces élèves utilisaient différentes stratégies dans l'exercice 1b ;

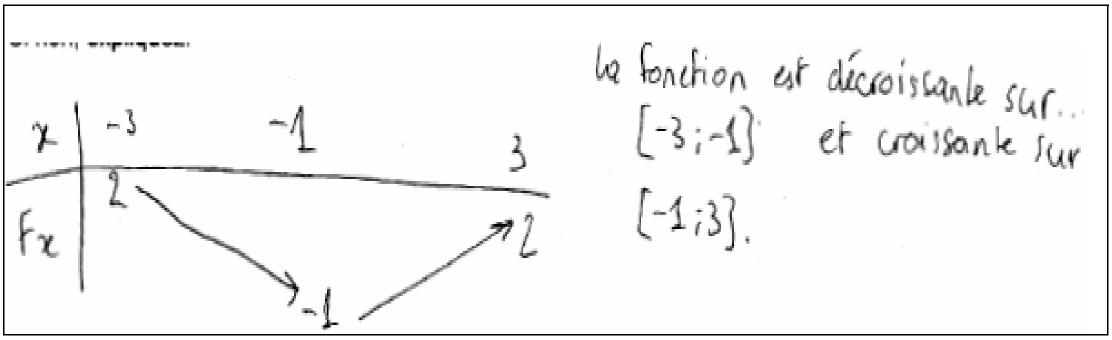
- E6 traçait des courbes ressemblantes à la courbe initiale.
- E7 traçait des courbes « libres ».
- E21 traçait des courbes en introduisant un nouvel extremum.
- E22 traçait des courbes en utilisant deux différentes stratégies : « introduire un nouvel extremum » et « courbe libre ».

Remarquons que même si certains élèves montrent une bonne maîtrise dans la question 1, où ils évoquent la possibilité de variations diverses pour un même tableau de valeurs (en particulier E7, E21 et E22) ils peuvent avoir des difficultés à cette question, ce qui montrent que leur connaissances sont encore instables.

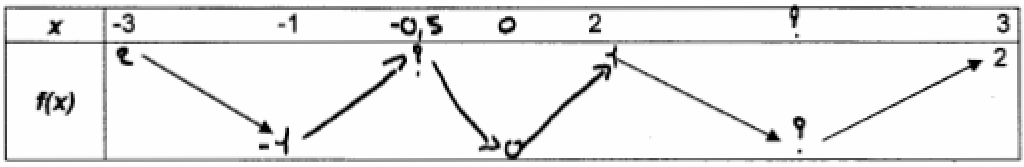
*1b. Ceux qui mettent des précisions sur les tableaux de variations donnés :*

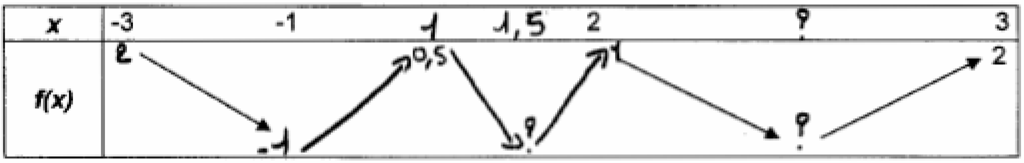
3 élèves essaient de compléter les tableaux de variations donnés sans rien ajouter dans l'intervalle entre 2 et 3 des abscisses.

- E1 ne pouvant visiblement pas compléter le tableau tel qu'il est donné, trace à côté un autre tableau de variations correspondant à la solution la plus simple compatible avec le tableau de valeurs donné : fonction décroissante sur [-3 ; -1] et croissante sur [-1 ; 3]. Rappelons que cet élève traçait toujours des courbes qui ne représentaient pas une fonction dans l'exercice 1b.




- E25 et E26 n'arrivent pas à compléter les tableaux de variations donnés dans l'intervalle entre 2 et 3 des abscisses. Tous les deux introduisent dès leur deuxième réponse deux nouveaux extrema dans l'intervalle entre -1 et 2, en utilisant les valeurs intermédiaires « -0,5 », « 0,9 » et « 1,5 » de x. Par contre, ils n'arrivent pas toujours à donner les images de ces valeurs. Nous précisons que ces élèves se trouvaient côte à côte pendant l'expérimentation. Voici les tableaux de variations que E26 a donné pour la question 2b:

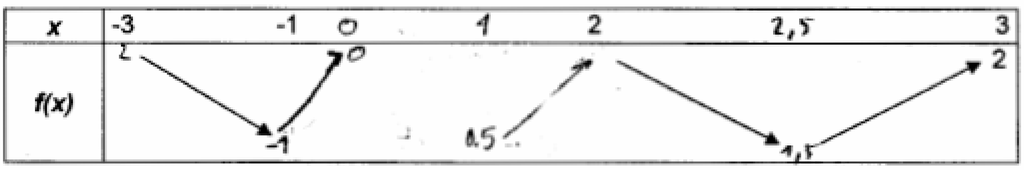



Rappelons que ces deux élèves traçaient des courbes en introduisant un nouvel extremum dans l'exercice 1b. On voit donc que leur stratégie est plutôt cohérente. Leur difficulté semble plutôt venir d'une difficulté à gérer l'arbitraire du choix de valeurs numériques (peut-être ont-ils encore des difficultés avec les nombres décimaux).

*<u>2. Introduire dans l'intervalle [2 ; 3] le milieu des points (2 ; 1) et (3 ; 2)</u>*

Un élève (E14) introduit dans l'intervalle [2 ; 3] le point de coordonnées (2.5 ; 1.5) milieu des points de coordonnées (2 ; 1) et (3 ; 2). Or ce point n'est pas conforme avec les variations de la fonction. Il rajoute aussi des valeurs du tableau de valeurs qui n'apparaissent pas dans le tableau de variations et qui ne sont pas pertinentes. Voici le tableau de variations qu'il a donné :



Pour la question 2b, il dit « On pourrait le compléter autrement en changeant des valeurs que nous ne connaissons pas » sans rien ajouter sur les tableaux de variations donnés.

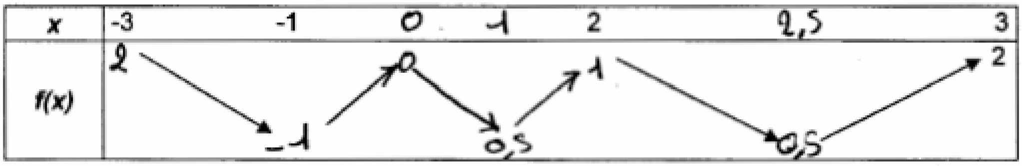
Rappelons que cet élève traçait toujours des courbes ressemblantes à la courbe initiale dans l'exercice 1b.

<u>*3. La valeur « 0,5 » comme ordonnée… !*</u>

4 élèves (E10, E13, E20, E29) introduisent la valeur « 0,5 » comme ordonné dans l'intervalle [2 ; 3]. Cette valeur est compatible avec le tableau de variations demandé. Ce qui est surprenant c'est que ces élèves semblent incapables de donner une réponse avec une autre valeur (à la question b, soit ils ne répondent pas soit ils continue à donner cette valeur), comme si les entiers et les demi-entiers étaient les seuls nombres autorisés.

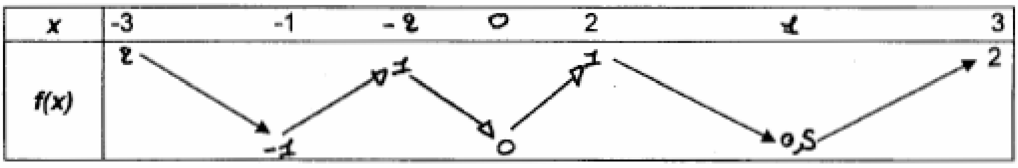
Voici les détails de leurs réponses ;

- E10 utilise « 2,5 » comme abscisse en face de l'ordonnée « 0,5 ». D'autre part, il manipule les valeurs du tableau de valeurs qui n'apparaissent pas dans le tableau de variations donné et il les met sans faire attention au sens des flèches qu'il utilise. Il donne ainsi le tableau de variations suivant :




Pour la question b, il continue à utiliser la valeur « 0,5 » comme ordonnée dans l'intervalle [2 ; 3] sans préciser l'abscisse correspondant à cette valeur. Rappelons que cet élève a tracé deux courbes qui ne représentaient pas une fonction et une autre courbe qui ressemblaient à la courbe initiale dans l'exercice 1b.

- E13 utilise toutes les valeurs du tableau de valeurs et il les manipule sans faire attention au sens des flèches qu'il utilise. Il ne respecte pas, non plus, l'ordre des abscisses. Il donne ainsi le tableau de variations suivant :




Il donne l'explication suivante pour la question b, sans rien écrire sur les tableaux de variations donnés ; « Il n' y a pas d'autre possibilité. La courbe représentait en arrière. Si on inverse x = 0  f(x) = 0 avec x = -2 f(x) = 1, c'est impossible à moins de tracer une nouvelle courbe. Ce cas serait identique si on inversait x = -2  f(x) = 1 avec x = 1 et f(x) = 0,5. ».

- E20 utilise « 2,5 » comme abscisse en face de l'ordonnée « 0,5 ». Sa réponse indique que la fonction est croissante sur l'intervalle [-1 ; 2].

Pour la question b, il dit « *Non, car les courbes n'auront pas les mêmes ordonnées donc pas les mêmes coordonnées* » sans rien écrire sur les tableaux de variations donnés. Pourtant, cet élève traçait toujours des courbes en introduisant un nouvel extremum dans l'exercice 1b. Là encore on note une difficulté qui semble propre à la gestion du registre des nombre décimaux.

- E29 utilise le point (2,5 ; 0,5) dans l'intervalle [2 ; 3] et sa réponse indique que la fonction est croissante sur l'intervalle [-1 ; 2]. Il continue à donner le même tableau de variations comme réponse pour la question b, sans donner d'explication.

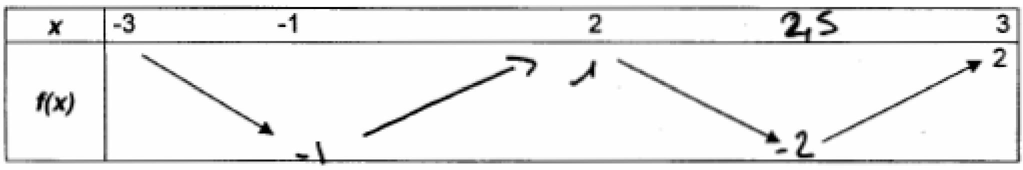
Rappelons que cet élève a tracé toujours des courbes qui ne représentaient pas une fonction dans l'exercice 1b.

Ces réponses nous montrent que même si les élèves sont capable d'envisager l'arbitraire laissé par le tableau de valeurs (ce qu'attestent souvent leurs réponses à l'exercice 1) ils ont du mal à concrétiser cela dans leur réponse à la question 2 à cause de difficulté liées au cadre numérique (représentation décimale et comparaison des décimaux). La créativité semble plus bridée dans le cadre numérique que dans le cadre graphique. Ceci est certainement lié à ces deux registres et aux activités de traitement associées : ainsi dans le registre numérique, on associe certainement nombre et calcul (un nombre apparaît souvent comme le résultat d'un calcul) alors que dans le registre graphique, la construction d'une courbe peut apparaître moins contrainte.

*4. Réponses correctes*

16 élèves (sur 30) arrivent à donner une réponse compatible avec le tableau de valeurs, tous choisissent la valeur « 2,5 » comme abscisse dans l'intervalle [2 ; 3], sauf deux élèves : l'un (E2) choisit la valeur « 2,9 » et l'autre (E3) en choisit « 2,7 ».

Aucun élève n'introduit un nouvel extremum dans l'intervalle [-1 ; 2] pour la question a. Ils ont donc tous donné la réponse du type suivante pour la question a.




Pour l'image de « 2, 5 » ;

- La valeur « 0 » est utilisée par 5 élèves
- La valeur « 0,5 » est utilisée par 4 élèves
- Les valeurs « -3 » et « -5 » sont utilisées, chacune, par 2 élèves
- Les valeurs « 0,7 », « -1 » et « -2 » sont utilisées, chacune, par 1 élève.

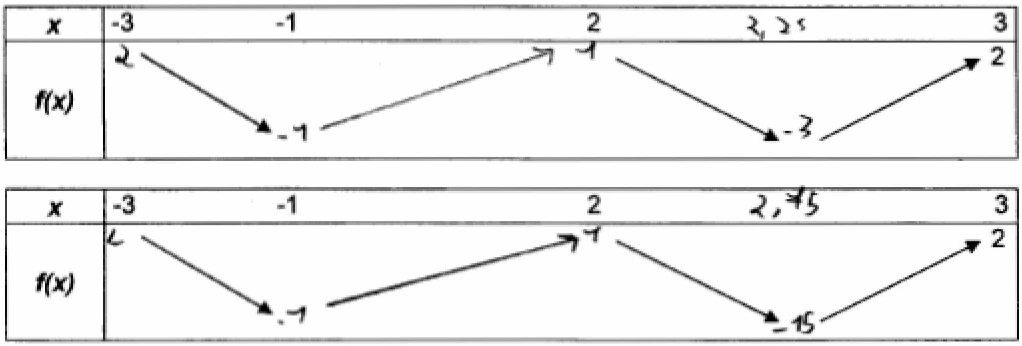
Pour la question b, la plupart d'entre eux changent ensemble l'abscisse et l'ordonnée dans l'intervalle [2 ; 3]. On voit ainsi l'utilisation des valeurs « 2,1 », « 2,2 », « 2,3 », « 2,4 », « 2,8 », ainsi que « 2,01 », « 2,25 », « 2,75 » comme abscisse ; et des valeurs « -0,5 », « 0,2 », « 0,5 », « 0,8 » et du même « -2 », « -3 », « -15 » comme ordonnée. Le choix des valeurs est correct sauf pour un élève (E3).

Nous pouvons distinguer deux types de réponses selon leur façon de compléter la partie du tableau entre -1 et 2 des abscisses ;

*4a. Sans introduire de nouvelle variation dans l'intervalle [-1 ; 2]*

8 élèves (E2, E3, E9, E12, E16, E19, E23, E30) continuent à indiquer que la fonction est croissante sur l'intervalle [-1 ; 2]. Deux (E16, E30) d'entre eux rajoutent des valeurs du tableau de valeurs qui n'apparaissent pas dans le tableau de variations demandé.

Voici la réponse de E12 pour la question b :



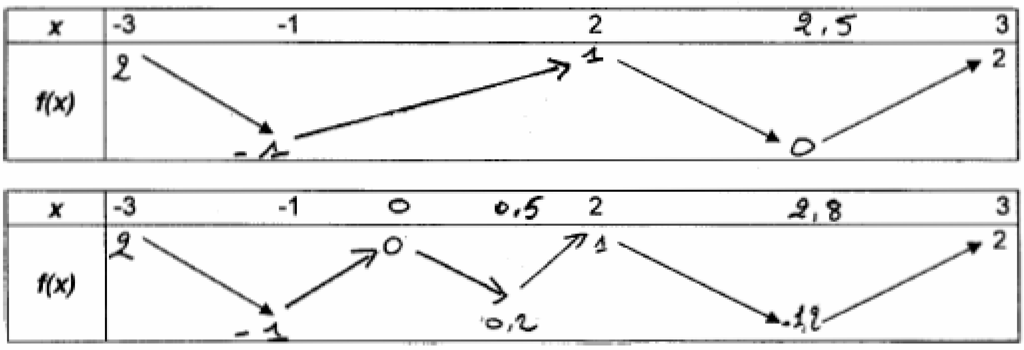

Rappelons que ces élèves utilisaient différentes stratégies pour tracer d'autres courbes dans l'exercice 1b ;

- E3 et E19 traçaient des courbes ressemblantes à la courbe initiale.
- E12 traçait des courbes « libres ».
- E16 traçait des courbes qui ne représentent pas une fonction (il était à côté de E17 et leurs réponses sont à peu près identiques !)
- E2, E23 et E30 utilisaient au moins deux différentes stratégies et ont tracé des courbes qui représentaient toujours une fonction.

*4b. Introduire une variation supplémentaire dans l'intervalle [-1 ; 2]*

8 élèves (E8, E11, E15, E17, E18, E24, E27, E28) introduisent une nouvelle variation au moins dans l'un de deux tableaux de variations qu'ils ont complété.

Voici la réponse de E28 pour cette question :



Pour introduire une nouvelle variations, ils choissent plutôt les valeurs demi-entières (« -0,5 », « 0,5 » et « 1,5 ») comme abscisse (sauf une fois « 0,3 » et une fois « -0, 25 »).

La plupart de ces élèves ont tracé des courbes « libres » pour la question 1b, sauf E18 qui a tracé des courbes qui ne représentaient pas une fonction.

### II.2.4 Troisième étape : retour en arrière

Comme nous l'avons vu, tous les élèves (sauf deux) ont spontanément tracé plusieurs courbes en réponse à l'exercice 1, alors que la moitié d'entre eux a rencontré des difficultés dans l'exercice 2. Ceux (E4, E5) qui n'ont pas pu arriver à tracer d'autres courbes dans l'exercice 1 n'ont pas fait de modification dans leur réponse.

Ainsi, comme dans la classe précédente, le retour en arrière prévu n'a pas pu jouer le rôle que nous avions initialement prévu.

Seulement, 4 élèves (E1, E6, E7, E15) ont fait une modification dans leur réponse à l'exercice 1. Rappelons que 3 (E1, E6, E7) d'entre eux n'ajoutent que des explications supplémentaires, sans faire de modification sur les courbes qu'ils ont tracées pendant la première étape. Ces trois élèves ne sont pas arrivés à répondre correctement à la question 2.

- E1 avait, à la question 1b tracé des courbes (à part la première) qui ne représentaient pas des fonctions avec l'explication suivante : « *Oui, on peut par exemple tracer la courbe représentant la fonction f dans l'intervalle [-10 ; 5] ou [5 ; 15], etc. Ou simplement tracer la même courbe avec les mêmes coordonnées des points mais en faisant des zigs-zags.* ». Pendant l'étape de retour, il a ajouté : « *comme par exemple dans les intervalles [-3 ; -2] et [-2 ; -1] on ne sait pas si la courbe est une ligne droite entre les 2 points.* ».

Rappelons que cet élève n'est pas arrivé à compléter le tableau de variations tel qu'il était donné dans l'exercice 2 et qu'il a construit à côté un autre tableau de variations correspondant à la solution la plus simple compatible avec le tableau de valeurs donné (fonction décroissante sur [-3 ; -1] et croissante sur [-1 ; 3]).

- E6 a d'abord donné l'explication : « La forme varie. Mais cette question est trop vague, on a une infinité de possibilité ; forme, points, je ne voix pas où vous voulez en venir. » et a tracé toujours des courbes ressemblantes à la courbe initiale dans l'exercice 1b. Pendant cette étape de retour, il a ajouté : « On peut toujours rajouter des points entre chaque point fixé mais on doit respecter les points donnés, entre eux l'ordre croissant ou décroissant de la fonction n'est pas limité. ».

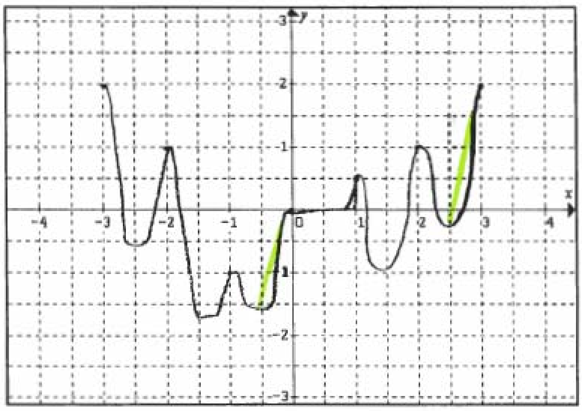
Rappelons que cet élève n'a pas pu arriver à compléter le tableau de variations donné dans l'exercice 2, en disant : « Nous avons que certaines valeurs de x donc il faut respecter ces valeurs, mais entre ces différents x, il y a plusieurs valeurs, que je ne connais pas. De plus, entre -1 et 2 je ne peux pas savoir le sens de variation, de même entre 2 et 3 je ne peux pas deviner quel x représente ? ».

- E7 a d'abord donné l'explication : « On peut tracer d'autres courbes. En effet, une fonction f peut comporter un carré ; dans ce cas là, 2 valeurs de x sont possibles. De plus, la forme de la courbe, avec la, présence de même abscisse et de même ordonnée, la forme de la courbe peut changer (sic) » et a tracé des courbes « libres » qui sont à la limite de la représentation d'une fonction (une d'entre elles ne respecte pas l'intervalle de définition et deux autres « reviennent en arrière »). Pendant cette étape de retour, il a ajouté « N'importe quelle courbe est compatible avec ce tableau de valeurs, mais la fonction doit être définie par seulement une seule courbe. ».

Rappelons que cet élève n'a pas complété le tableau de variations donné dans l'exercice 2, en disant : « Je ne sais pas répondre à cette question car nous nous donnons que certaines valeurs de x ; de plus on ne nous donne pas le tracé de la courbe. La fonction peut être croissante de [-1 ; 1] et décroissante de [1 ; 2] ». (Ajoutons de plus que ces deux élèves (E6, E7) se trouvaient côte à côte pendant l'expérimentation !).

- E15 fait des modifications sur deux courbes qu'il avait tracées dans l'exercice 1b. Il modifie seulement les parties de ces courbes où il y avait une « retour en arrière », de façon à la rendre compatible avec la courbe d'une fonction.

Voici la modification qu'il a fait sur une courbe :



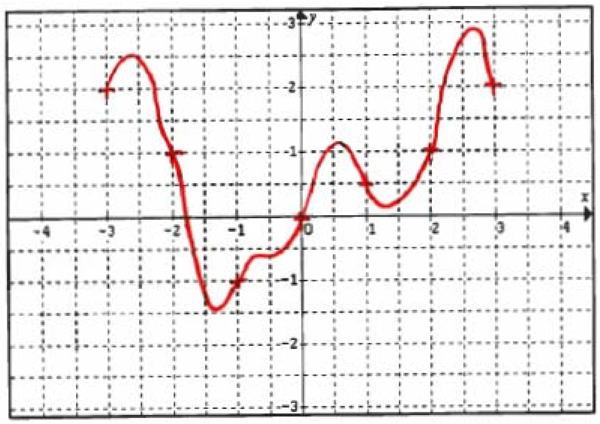

Cet élève a répondu correctement à l'exercice 2.

Ainsi sauf pour E15, qui profite de cette possibilité de revenir en arrière pour corriger de façon pertinente une erreur commise au début, sans toutefois que cela n'ait de lien direct avec la question 2, pour tous les élèves la question 2 n'a pas eu d'influence sur le traitement de la question 1, y compris pour les 3 élèves qui font un commentaire supplémentaire dans la mesure où celui-ci ne fait que renforcer leur première opinion.

### II.2.5 Mise en commun

La professeure commence par les courbes récupérées pendant l'expérimentation. Au vu de ce qu'elle a observé, elle choisit les réponses de certains élèves afin rendre compte de la diversité.

Elle met ainsi sur le rétroprojecteur comme premier exemple de réponse d'élève, la courbe suivante :



Elle ne choisit donc pas de mettre au débat, la réponse quasi unanime des élèves en consistant la courbe « simple lisse ». On peut supposer qu'elle estime cette étape dépassée par tous les élèves et qu'elle choisit ainsi de commencer par une courbe « libre ».

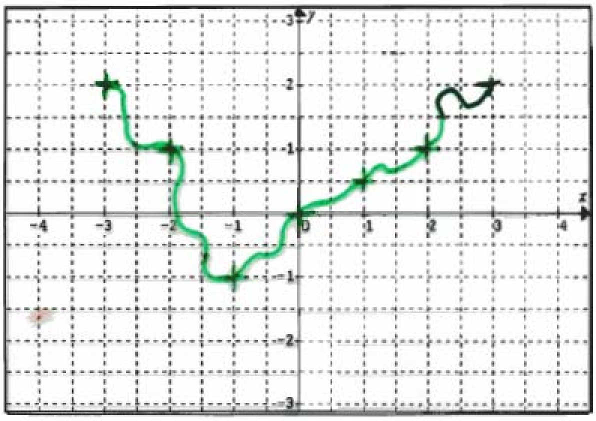
Pour cette courbe, la professeure demande aux élèves qui ne l'ont pas trouvée s'ils l'accepteraient comme courbe possible. E2 répond alors :

> 4. E2 : ça correspond bien à l'énoncé puisque les valeurs données sont bien euh… positionnées et la courbe elle passe par là.

La professeure reprend la formulation de l'élève et demande, s'il y a d'autre chose à dire. Elle explique alors que la courbe n'est pas définie uniquement par ces points du tableau de valeurs, soulignant ainsi qu'entre deux valeurs successives du tableau il y a des nombreuses valeurs qu'on ne connaît pas. Aucun élève ne se manifeste sur ce point là.

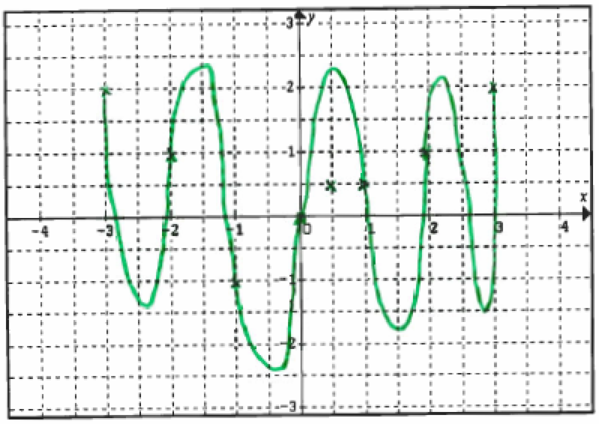
La professeure demande alors à nouveau si tout le monde accepte cette courbe comme courbe possible, E15 répond : « non, chaque abscisse n'a qu'une image » mais il n'arrive pas à expliquer pourquoi il a dit « non ». Pourtant cet élève a tracé des courbes libres pour la question 1b. E25 prend alors la parole et dit que c'est la définition d'une fonction que chaque x n'a qu'une seule image, en ajoutant qu'on peut accepter cette courbe comme courbe possible puisqu'il n'y a pas de ligne droite et qu'il n'y a pas de retour en arrière. Il montre ainsi une assez bonne connaissance des critères permettant de vérifier qu'une courbe représente ou non une fonction.

La professeure met ensuite la courbe suivante, sur le rétroprojecteur :




Il n'est pas évident que la professeure ait choisi exprès à ce moment-là, cette courbe pour illustrer le cas d'une courbe qui ne représente pas une fonction, d'autant plus qu'elle avait visiblement fait ses choix à l'avance. Néanmoins, cet exemple tombe à point nommé par rapport au mini débat qui vient d'avoir lieu. Ainsi dès qu'elle demande aux élèves si on peut accepter cette courbe, plusieurs élèves disent tout de suite : « *Non, parce qu'il y a des retours en arrière* ». La professeure conclut alors qu'on ne peut pas accepter cette courbe, puisque celle-ci ne respecte pas la définition d'une fonction et elle ajoute « *Normalement pour une valeur donnée de x, on doit avoir une seule valeur possible pour l'image appelée f(x)* ». Cette intervention permet de recentrer sur la définition d'une fonction, contrairement au critère des élèves qui ne prend en compte que l'allure de la courbe faisant défaut (les retours en arrière).

Le professeur met enfin la courbe suivante, sur le rétroprojecteur :




Elle précise que cette courbe est vraiment différente et demande si on l'accepte comme courbe possible. Aucune élève ne répond à cette question. La professeure compare alors celle-ci avec la première courbe et demande quels sont leurs points communs. Un élève répond que les deux courbes passent par tous les points qui sont donnés par le tableau de valeurs. La professeure précise que, en dehors du fait qu'elles passent par ces points, elles sont quand même différentes. Un élève (E6) commence ainsi à parler du sens de variation. Voici la suite des échanges :

30. P : […] Alors pourquoi on a besoin de parler du sens de variation pour comparer ces deux courbes ? E23 ? C'est quoi le sens de variation ?

31. E23 : C’est euh (…) Quand la courbe monte et descend entre deux points si l’image de x augmente ou euh...
32. P : Bon alors, est-ce que celle-ci fait la différence entre les deux ? Alors essaie de m’expliquer E28 !
33. E28 : (*il est devant le tableau noir*). Entre ce point et ce point (*il montre les deux premiers points du tableau*) la courbe (n°3), elle est décroissante puis croissante, mais celle-là (n°1) elle est d’abord croissante puis décroissante.
34. P : Oui, est-ce que ça (…), dans les tracés on est autorisé à tracer comme ça ? Est-ce qu’on a le droit de descendre et de monter ou de monter et descendre après ?

(*La plupart des élèves disent qu’on a le droit !*)

35. E15 : Ben oui, on a le droit, parce que dans le tableau de valeurs, le sens de variation il n’est pas précisé.
36. P : Dans le tableau de valeurs, le sens de variation, il n’est pas précisé. Qui n’est pas d’accord avec ça ? Donc, tout le monde est d’accord.

On constate ici que la professeure, conformément à ce que nous lui avions expliqué de notre but dans cette expérimentation, centre le débat sur les différences en termes de sens de variation. Par contre, elle n’utilise pas d’argument plus « simple » comme de dire qu’un tableau de valeurs n’est pas plus que la donnée d’un petit nombre de valeurs qui laissent une grande marge de manœuvre pour tracer les courbes correspondantes.

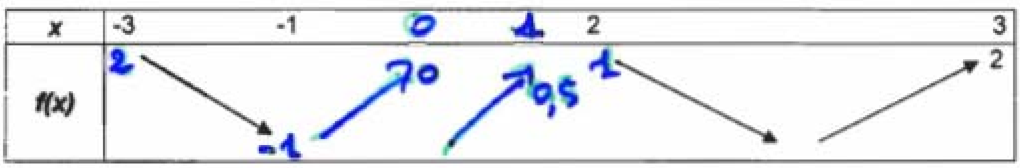
A la suite de la conversation, E16 prend la parole et demande :

37. E16 : On parle de la première fiche, non ? Parce que sur la première fiche on n’a pas précisé le sens de variation ?
38. P : On parle de la première fiche. Oui, tu as tout à fait raison. On est toujours sur la première fiche quand on vous avait demandé des tracés et sur la première fiche il n’est pas précisé. Alors donc, si tu dis ça […] sur la deuxième ?
39. E16 : Parce que le tableau de variations est changé un peu sur la deuxième.
40. P : Comment il est changé ?
41. E16 : J’sais pas -3 et … (*incompréhensible*).

On constate que E16 ne pense encore qu’à la correspondance directe entre tableau de valeurs et tableau de variations.

La professeure passe ensuite aux tableaux de variations recueillis pendant l’expérimentation. Comme dans le cas où les courbes, elle choisit les réponses de certains élèves afin rendre compte de la diversité.

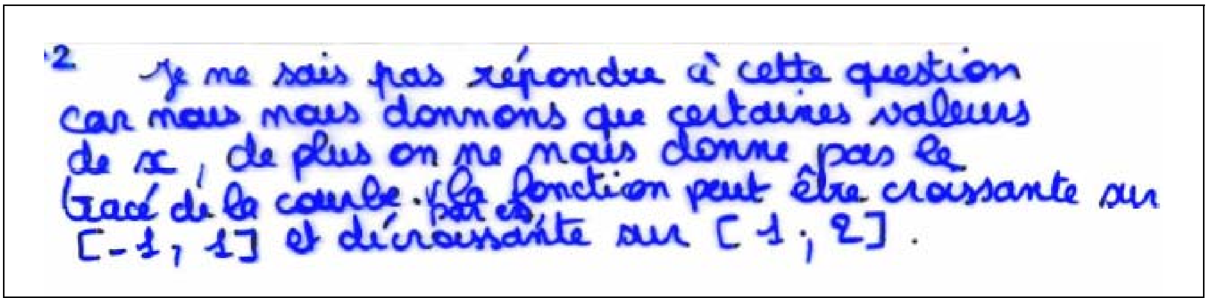
Elle met ainsi sur le rétroprojecteur comme premier exemple de réponse d’élève, le tableau de variations suivant :




Nous précisons que 9 élèves (sur 30) avait répondu avec un tableau de variations sans mettre de valeur au minimum entre 2 et 3, ni au niveau de l’abscisse, ni au niveau de l’ordonnée. Nous pensons que le professeur a ainsi constaté, pendant l’expérimentation, qu’un nombre important d’élèves donnent ce type de réponse et c’est pourquoi elle a choisi ce tableau pour faire discuter les élèves.

La professeure demande si les élèves sont d'accord avec ce qui est écrit dans ce tableau et si ça peut être un tableau possible. E7 précise alors qu'elle est gênée par le fait qu'il y a deux flèches qui montent côte à côte. E23 répond que cela est possible et que ce n'est pas faux mais qu'on aurait dû faire une seule flèche et il ajoute également qu'il manque un point dans [2 ; 3] et une flèche entre 1 et 2. La professeure demande juste s'il doit toujours y avoir une flèche entre deux valeurs mais la discussion s'arrête là et la professeure ne donne aucun commentaire pour le point qu'on pourrait donner dans [2 ; 3].

La professeure passe ensuite à un autre exemple de réponse d'élève :

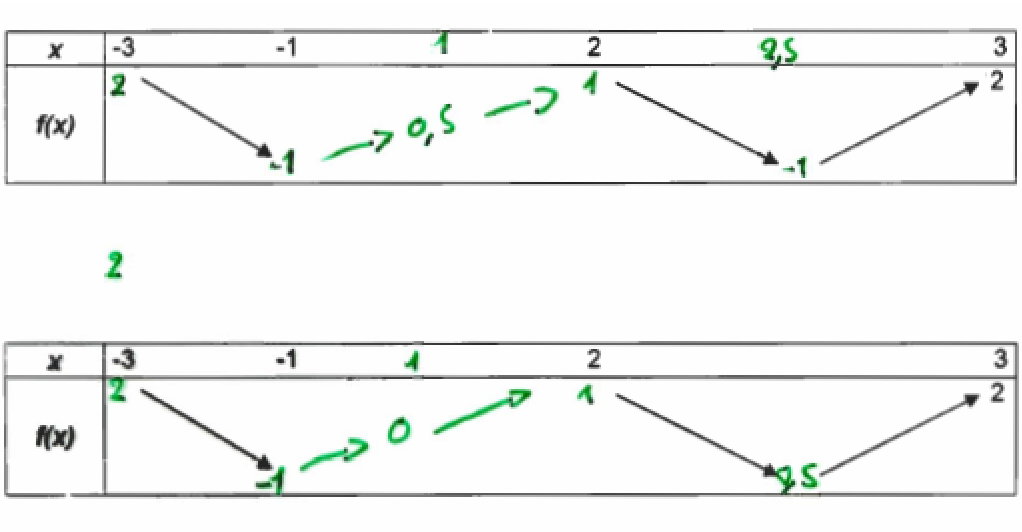

2 Je ne sais pas répondre à cette question car nous nous donnons que certaines valeurs de x, de plus on ne nous donne pas le tracé de la courbe. par ex. la fonction peut être croissante sur [-1, 1] et décroissante sur [1, 2].

Elle choisit cette explication puisque, comme pour la réponse précédente, certains élèves avaient donné ce type de réponse. La professeure demande les avis des élèves sur cette explication et s'adresse à l'élève (E7) qui avait donné cette réponse. Voici la suite des échanges :

62. E7 : Je pense que ça va pas, on peut donner plusieurs tableaux compatibles avec le tableau de valeurs et donc…
63. P : Oui donc…finalement tu pourrais répondre ou pas ?
**64.** E7 : Ben, on pourrait compléter le tableau de variations mais… (*bruits*)… **mais une seule réponse !**
65. P : Donc, c'est vrai.
66. E7 : (*incompréhensible*)
67. P : Alors, tu es en train de dire que tu pourrais produire plusieurs tableaux de variations.
68. E7 : Non par rapport à la question…
69. P : D'accord ! finalement tu pourrais produire. Ce que tu as rajouté c'était quoi exactement ? On n'a pas bien compris.
70. E : Ben c'est-à-dire qu'on nous a demandé de représenter la fonction. On n'a pas pu parce que … (*bruits*)

Même si E7 arrive à dire qu'on peut donner plusieurs tableaux de variations compatibles avec le tableau de valeurs donné et accepte qu'il pourrait répondre à cette question, il a beaucoup de difficulté à accepter l'idée qu'il peut y avoir plusieurs réponses possibles à une question.

A la suite de cette discussion, la sonnerie retentit et le professeur se dépêche et passe un autre exemple de réponse d'élève. Elle met ainsi sur le rétroprojecteur une autre réponse comprenant les deux tableaux de variations suivant, et demande leur avis aux élèves.




E16 répond que le premier tableau est juste. Voici la suite des échanges :

100.P : Qu'est-ce qui fait te dire qu'il est juste, enfin qu'il est possible ?
101.E16 : (*bruits*).
102.P : Oui, donc tu contrôles juste qu'on a bien l'image de -3 est 2, l'image de -1 est -1 (…) l'image de 2.5 et on ne donne pas l'image de 2.5 comment je peux savoir que c'est -1 ?
103.E ? : On imagine euh… (*bruits*)
104.P : On imagine ! Pourquoi alors, par exemple, on ne peut pas mettre 4 ?
105.E ? : Ca doit être inférieur à 1.
106.P : Ca doit être inférieur à 1 ! D'accord bon. […]

La professeure passe alors à la phase de l'institutionnalisation :

106.P : […] Alors, finalement pour ce problème c'est-à-dire avec ce tableau de valeurs, y avait combien de courbes possibles ? Combien on en a trouvées ? 3, 4 je ne sais plus. E12 ?
107.E12 : Y en a plein.
108.P : Y en a plein. On peut les compter ?
(*La réponse « une infinité » est donnée par quelques élèves*).
109.P : Une infinité. Et le tableau de variations ?
(*A nouveau la réponse est donnée « une infinité » par quelques élèves*).
110.P : Une infinité aussi. Alors quelle conclusion on pourrait en tirer de ça ?
111.E12 : **Ça ne suffit pas d'avoir un tableau de valeurs ou quelques points de la courbe pour définir la fonction.**
112.P : (*Elle la répète*) Alors qu'est-ce qu'il faudrait … (*bruits*)…?
113.P : Alors E7 ?
114.E7 : Il faudrait qu'on nous donne la fonction.
115.P : Il faudrait qu'on nous donne la fonction ! C'est-à-dire ?
116.E7 : **Sa formule**… (*bruites*)…
117.P : Comment ? Il faudrait quelle information, sous quelle forme il faudrait donner des informations ?
118.E7: Avec des x.
119.P : Avec des x qu'est-ce que vous euh… oui E23 ?
120.E23 : **Il faut qu'on nous donne l'expression littérale de la fonction.**
121.P : Il faut qu'on nous donne l'expression littérale de la fonction ! Que est-ce que ça veut dire E11 ?
122.E11 : **La formule f(x), la formule de la fonction…**
123.P : La formule de la fonction. La formule qui définit la fonction. Oui ?
124.E ? : Il faudrait que la fonction soit monotone.
125.P : Il faudrait que la fonction soit monotone ! Alors si on connaît le domaine de définition si on sait que la fonction est monotone est-ce que... euh... on l'a précisément la fonction ? C'est-à-dire qu'on n'aurait qu'une courbe possible, euh...
126.E ? : Si on connaît toutes les images.
127.P : Si on connaît toutes les images !
128.E ? : Ça veut dire quoi monotone ?

129. E ? (Un autre) : Soit f est croissante soit f est décroissante.
130. P : Donc, il faudrait qu'on ait toutes les images de l'ensemble de définition ou bien il faudrait qu'on ait la formule f(x) pour avoir précisément la fonction ! Est-ce que vous avez quelque chose à rajouter ? Non ? Bon ben on s'arrête là !

On voit bien qu'une fonction est avant tout une formule pour les élèves même s'ils se trouvent en Seconde, où l'enseignement tend à leur montrer au contraire la diversité des modes de représentation. Ils sont formatés par l'idée qu'il faut d'abord « connaître » une fonction avec sa formule pour la connaître entièrement, cela prévaut sur tous les autres types de représentation.

# CONCLUSION

Dans l’ensemble les élèves se sont bien sortis de l’exercice 1 et ils ont ainsi montré qu’ils étaient capables de gérer plutôt bien le rapport entre tableau de valeurs et courbe (même si certains ont tracé des courbes qui ne représentent pas une fonction).

Alors que dans l’exercice 2, la plupart ne sont pas arrivés à répondre correctement et ils ont ainsi montré des difficultés bien spécifiques aux tableaux de variations. Ceci n’est pas très troublant, dans la première classe, dans la mesure où ils sont en tout début d’apprentissage et où le tableau de variations reste encore un objet problématique que les élèves ont du mal à manier. Par contre, nous avons constaté aussi pendant la deuxième expérimentation où les élèves se trouvaient en fin d’enseignement, que le tableau de variations pose encore beaucoup de difficultés (la moitié seulement de la classe donne une réponse correcte). On peut avancer deux raisons à cet état de fait : d’une part, certains élèves ont été bloqués dans l’exercice 2 puisqu’ils n’avaient qu’un seul modèle de courbe correspondant à un seul tableau de variations dans l’exercice 1 (surtout ceux qui tracent toujours des courbes ressemblant à la courbe initiale) et que ce tableau de variations n’est pas compatible avec celui à compléter. Ils se sont ainsi trouvés incapables de gérer la contradiction et donc, ceci montre qu’ils n’arrivent pas à faire une conversion directe entre le tableau de valeurs et le tableau de variations et ils se sentent ainsi obliger de passer par le registre graphique (faute d’avoir une formule) comme un intermédiaire. Et d’autre part, ceci a dû être lié au registre numérique, au registre graphique et aux activités de traitement associés : ainsi dans le registre numérique, on associe certainement nombre et calcul (un nombre apparaît souvent comme le résultat d’un calcul) alors que dans le registre graphique, la construction d’une courbe peut apparaître moins contrainte.

Même si pour la plupart des enseignants le tableau de variations est un objet qui peut sembler parfaitement transparent pour les élèves (cf. chapitre B3), nous pensons, au vu de nos analyses, qu'un apprentissage spécifique pour le tableau de variations est nécessaire tant pour le côté syntaxique (apprentissage des codes) que pour le côté conversion en lien avec les objets des autres registres.

Au vu de nos expérimentations, il ressort que les élèves ont bien compris qu’un tableau de valeurs ne donne qu’une information partielle sur une fonction et qu’on ne sait rien pour les valeurs entre celles du tableau. Néanmoins, s’ils sont capables de tracer des courbes très différentes associées à un même tableau de valeurs (quitte à oublier les contraintes d’une fonction), ils ont beaucoup plus de difficultés à trouver des tableau de variations différents. Deux types de raisons peuvent être suggérées. D’une part, il semble bien que le tableau de variations ne jouit pas d’une grande autonomie, dans le sens où il est lié à une lecture dynamique de la courbe, ainsi certains élèves ne peuvent passer directement d’un tableau de valeurs à un tableau de variations sans passer par l’intermédiaire de la courbes. D’autre part, il se peut aussi que les deux objets soient trop proches d’un point de vue sémiotique pour que les élèves arrivent facilement à imaginer des variantes de tableaux de variations pour un tableau de valeurs donné. Il faut en effet introduire dans un registre très proche de nouvelles valeurs qui n'apparaissent pas dans le tableau de valeurs initial. Il ressort donc de cette analyse que le tableau de variations reste un outil avec peu d'autonomie, c'est avant tout un moyen de codage de données issues d'une lecture de la courbe. Le traitement dans ce registre de représentation reste problématique pour les élèves (voir les erreurs sur les doubles flèches ou les valeurs mal ordonnées). D'autre part si la conversion à partir de ou vers le registre graphique ne semble pas poser de problème, la conversion à partir du registre des tableaux de valeurs reste problématique, ce qui légitime les propositions de ces activités.

# CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Revenons sur le questionnement initial qui nous a conduit à mener ce travail. Notre point de départ était de déterminer la nature des évolutions récentes des programmes français sur la notion de fonction en classe de seconde, les raisons et les conditions écologiques de ces évolutions ainsi que les conditions et les contraintes de leur mise en application dans les classes. Une analyse rapide de cette évolution nous a montré un renforcement progressif de l'utilisation des divers modes de représentation des fonctions, plus particulièrement, une injonction à utiliser dans des conditions nouvelles les objets tableau de valeurs et de variations. Nous avons ainsi choisi de privilégier, tout au long de ce travail, l'étude de l'utilisation des objets tableau de valeurs et tableau de variations et de leurs liens avec les autres modes de représentation (plus particulièrement le registre graphique) dans l'enseignement / apprentissage de la notion de fonction en seconde.

**Analyse écologique de l'évolution des programmes depuis 1980**

Nous avons tout d'abord mené une analyse institutionnelle de la notion de fonction dans une perspective écologique pour dégager les différents systèmes de contraintes et de conditions qui pèsent sur les évolutions de ce savoir au cours du processus de transposition didactique interne.

Pour faire cette étude, nous avons choisi de commencer au début de la période de la contre-réforme des mathématiques modernes (à partir de 1980). Ce choix s'est imposé pour des raisons pratiques de taille (limitation aux évolutions « récentes »), mais aussi par le fait que ce n'est qu'à partir de 1980 que des changements significatifs commencent à apparaître dans les programmes pour l'étude du concept de fonction. En effet, de 1971 à 1983 le programme sur la notion de fonction reste à peu près stable.

Cette étude nous a permis de voir les variations dans les différentes façons possibles de représenter les fonctions en mathématiques, dont témoignent les programmes successifs. Au début de la contre-réforme des mathématiques modernes (1980), le registre algébrique est resté dominant dans l'étude des fonctions. Dans les années 1990, l'enseignement de l'algèbre au collège a vu un net recul, de fait, le registre algébrique a perdu de sa prédominance en seconde. En contre-partie, pour des raisons idéologiques visant à mieux ancrer les mathématiques dans la « vie quotidienne », les programmes ont essayé de renforcer l'aspect utilitaire des fonctions en lien avec des domaines extra-mathématiques. Cette tendance a conduit à mettre en avant plutôt les registres graphique et tableau de valeurs. Ainsi le registre graphique commence, dès le début de la contre-réforme des mathématiques modernes, à prendre du terrain sur le registre algébrique pour devenir nettement le registre central (dans la phase d'introduction) à partir du programme de 1990. De plus, à partir du programme de 1990, la calculatrice programmable est introduite, pour la première fois, en seconde pour l'étude des fonctions. Enfin les statistiques qui apparaissent pour la première fois dans le programme de 1980 en seconde, ont pris une place croissante jusqu'au nouveau programme de 2000. Ces deux dernières évolutions ont donné une importance croissante aux registres graphique et tableau de valeurs. Dans le même temps, les connaissances algébriques des élèves entrant en seconde ayant diminué, le registre algébrique n'a plus pu jouer un rôle central. En effet, le bestiaire des expressions algébriques connues des élèves s'est peu à peu réduit aux fonctions affines, du seconde degré, racine carré, inverse, cosinus et sinus.

Le tableau de variations a longtemps seulement joué un rôle d'intermédiaire entre l'expression analytique de la fonction et le tracé de sa courbe représentative. C'est dans ce contexte un objet transparent sur lequel on ne trouve pas de définition. Dans les évolutions les plus récentes des programmes, on voit apparaître des tâches où le registre du tableau de variations peut apparaître en entrée.

Cette étude nous a ainsi permis de mieux éclairer les choix actuels des programmes ainsi que de mieux comprendre le rôle que les tableaux de valeurs et de variations sont sensés jouer dans l'écologie définie par les programmes les plus récents.

**Etat des lieux de l'enseignement actuel de la notion de fonction en classe de seconde**

Nous avons ainsi fait un état des lieux pour voir comment ont été traitées les nouveautés du programme par les diffèrents acteurs de la transposition didactique interne.

Nous avons tout d'abord fait une analyse écologique des manuels actuels (édition 2000). Puisque, ces derniers sont considérés comme un des produits de la première étape de la transposition didactique interne (Ravel 2003) ou comme des institutions de formation pour les enseignants (Neyret 1995). Pour des questions de faisabilité, nous avons choisi quatre manuels qui semblent parmi les plus utilisés par les enseignants. Cette analyse nous a montré qu'il existe une grande diversité dans ce qui est proposé dans l'introduction à la notion de fonction et qu'il y a donc un écart important entre les intentions des programmes et leur réalisation dans certains manuels. Plus particulièrement, l'utilisation des tableaux de valeurs et de variations est très différente suivant les manuels. Certains leur donnent un statut important alors que pour d'autres, leur rôle est très faible. De même pour certains, ils ne sont qu'un outil pour tracer les courbes alors que pour une très faible minorité, ils ont un rôle plus étendu dans l'acquisition des connaissances sur les fonctions, en particulier ils représentent un registre à part entière de traitement sur les informations pertinentes pour une fonction. On voit donc que l'injonction faite par les programmes à utiliser ces objets se révèle difficilement viable dans la plupart des manuels.

Dans un second temps, nous avons interrogé des enseignants pour connaître leurs choix didactique sur l'enseignement de la notion de fonction. Nous voulions ainsi savoir s'il y a une distance entre leurs choix et ce qui apparaît dans le programme et dans les manuels. Nous avons montré que cette difficulté à faire vivre, dans des conditions nouvelles les objets tableaux de valeurs et de variations, se retrouve également dans les choix didactiques des enseignants. Tout comme les manuels, il y a une diversité dans la prise en compte des tableaux dans la pratique de la classe : peu de travail explicite sur les connaissances propres des tableaux, peu de tâches concernant les conversions de registres, seules les types de tâches classiques sont choisis par les enseignants. Notamment, les pratiques habituelles des professeurs de mathématiques actuels laissent encore peu de place à des exercices concernant le registre tableaux, qui pourraient permettre de problématiser certaines notions et de les discuter pour faire avancer les connaissances des élèves sur les fonctions.

Deux facteurs peuvent expliquer le fait que cette volonté du programme n'est pas reprise par les manuels et les enseignants. D'une part, mettre en avant cet aspect du programme est en rupture avec les représentations dominantes de ce qu'est l'activité mathématique dans l'institution scolaire française, ceci est d'autant plus vrai pour les enseignants qui enseignent depuis longtemps, pour lesquels le cadre algébrique est dominant. Ils ont en effet du mal à intégrer d'autres approches. D'autre part, les auteurs des manuels et les enseignants n'ont peut-être pas pris conscience que l'utilisation de différents registres et plus particulièrement la conversion entre différents registres sont importantes pour la compréhension de la notion de fonction.

Enfin, pour compléter notre tentative d'état des lieux, nous avons interrogé des élèves, afin de voir ce qui avait été réellement appris. Notre but était de mieux connaître leurs capacités à résoudre différentes tâches mettant en jeu l'utilisation des tableaux de valeurs et de variations, en particulier au regard de la conversion entre registres. L'analyse de leurs réponses a montré que, que ce soit pour les tableaux de valeurs ou de variations, ils ont déjà construit des connaissances en acte qui font qu'ils ont l'illusion d'unicité et d'exhaustivité de ces objets dans la représentativité d'une fonction. De plus, se rajoutent visiblement des difficultés liées au sens du codage employé. Tout cela montre que seuls certains types de tâches classiques liées à ces objets sont prises en compte dans l'enseignement et que les connaissances sur ces objets restent transparentes.

Faire vivre certains aspects du programme semble donc difficile dans le cadre des systèmes de contraintes qui pèsent à chaque niveau du processus de transposition didactique interne. Or, cette question est fondamentale si on réfère à la position de Duval (1993) pour qui l'utilisation de différents registres, les activités de traitement et surtout les activités de conversion sont essentielles dans le processus de conceptualisation des objets mathématiques, et tout particulièrement pour la notion de fonction.

Comment faire vivre alors ces différents aspects du programme dans le savoir apprêté[21] et le savoir enseigné ? Deux pistes nous semblent intéressantes. En dehors des questions de formation des enseignants sur l'importance de prendre en compte différents registres, un travail peut être fait au niveau des manuels. En effet, il nous paraît insuffisant de mettre dans les programmes des incitations à l'utilisation des objets tableau de valeurs et de variations en classe. Proposer systématiquement, dans les manuels, une véritable réflexion didactique sur l'utilisation de ces objets permettrait, a priori, de fournir des conditions davantage favorables à la compréhension de la notion de fonction en classe, puisque la quasi-totalité des enseignants utilisent les manuels scolaires comme référence pour construire leurs cours. Notons que notre étude de manuels a été faite en 2001. Depuis, une nouvelle série de manuels est sortie en juin 2004. Un survol rapide de ces nouveaux manuels semble montrer que les choses ont évolué dans le sens d'une plus grande prise en compte des tableaux de valeurs et de variations.

Enfin, en faisant l'analyse écologique de l'évolution du programme, nous avons constaté qu'il y a eu des changements radicaux depuis les mathématiques modernes en France. Nous avons alors pensé à l'enseignement des mathématiques en Turquie en tant qu'un futur didacticien

[21] terme utilisé par Ravel (2003)

turc. Puisque, en Turquie, il n'y a pas de changement significatif des programmes depuis les mathématiques modernes et que tous les acteurs de l'enseignement se plaignent de la pauvreté des programmes officiels turcs et incitent à les changer[22]. Nous avons ainsi commencé, à partir de cette analyse, à nous poser des questions en discutant avec d'autres futurs didacticiens turcs : comment changer les programmes pour les rendre plus performants en termes d'apprentissages ? Bien sûr cela n'est pas suffisant, comme nous le montre l'état des lieux de l'enseignement de la fonction en France, il faut aussi prendre en compte tous les acteurs de la transposition didactique interne pour que ces changements soient effectifs et performants. De plus, en Turquie, il y a d'autres contraintes, plus particulièrement la préparation au concours d'entrée à l'université[23] et l'enseignement du dershané[24] ont une grande influence sur les pratiques des enseignants. Ainsi, il apparaît clairement, au vu de cette étude, qu'il ne suffit pas de changer les programmes, si on ne n'accompagne pas ces changements par un dispositif de formation des enseignants.

**Expérimentation visant à tester la viabilité de certains points phares des programmes 2000**

Les résultats présentés ci-dessus soulignent la détermination d'un réseau de conditions et de contraintes qui font que certains éléments essentiels du nouveau programme n'arrivent pas à émerger dans l'enseignement. Nous avons donc élaboré deux activités introductives pour essayer de mettre en œuvre certains de ces points du programme et les faire appliquer dans les classes de seconde. Ces deux activités concernent plus particulièrement l'utilisation des tableaux de valeurs et de variations. Nos analyses ont montré, d'une part, que l'idée des variations ne s'impose pas d'elle-même pour la description d'une courbe, et, d'autre part, qu'il y a des dysfonctionnements au niveau des registres. Plus précisément, les élèves travaillent dans le registre graphique comme s'ils traitaient un dessin sans référence explicite au cadre des fonctions. Enfin, un apprentissage spécifique pour le tableau de variations semble nécessaire tant sur le plan syntaxique que sur celui des conversions dans d'autres registres.

En effet, l'activité 1, qui se situe au début de l'enseignement des fonctions, a montré que les élèves ne voient pas réellement la variation comme une information importante sur la courbe et qu'ils ont en fait l'illusion que le tableau de valeurs est suffisant pour la description. Un facteur peut expliquer ce phénomène : les élèves et les professeurs (quand ils étaient élèves) ont certainement travaillé plus spécifiquement les tableaux de valeurs en lien avec le registre graphique, et ceci peut constituer un obstacle à la construction de l'idée globale de courbe. Par conséquent, le fait qu'une courbe contienne plus d'informations qu'un tableau de valeurs n'est pas encore intégré par les élèves. De plus, il est très difficile d'aller contre cette conception, puisque la stratégie « point par point » fonctionne assez bien. Nous pensons que si on veut

[22] Voir Baştürk (2003) et Özgür (2004)

[23] En Turquie, pour commencer leurs études supérieures, les élèves doivent, à la fin du lycée, passer un examen qui est préparé par le Centre de Sélection et d'Installation des Etudiants. Ce concours se déroule une fois par an et consiste en une éprouve unique comprenant tous les sujets. Cette épreuve est constituée de 188 questions à choix multiplies (cinq choix par question) et les élèves doivent répondre en trois heures.

[24] Ce sont des établissements privés qui ont pour mission de renforcer ou de soutenir les élèves (faibles ou non !) dans l'enseignement secondaire et de préparer les élèves au concours d'entrée à l'université et aux autres concours (par exemple, aux concours de lycées privés, de lycées anatoliens, de lycées scientifiques, etc.). Actuellement les dersanés occupent une grande place et jouent un rôle très important.

construire l'idée de variation, il faut éviter de trop privilégier les tableaux de valeurs ou bien il faut faire travailler sur la représentativité partielle d'un tableau de valeurs pour une fonction. De plus, cette analyse a montré que l'utilisation du tableau de valeurs et les connaissances qui y sont attachées restent dans la composante privée du rapport au savoir. Ainsi, les enseignants considèrent que le tableau de valeurs n'est pas une bonne représentation de la fonction, et ils l'enferment dans le rôle de l'outil transitoire entre l'expression analytique et la courbe.

Par ailleurs, l'analyse des réponses des élèves à l'activité 2 nous a montré que leurs connaissances ont évolué et qu'ils sont donc plus capables de gérer le rapport entre tableau de valeurs et courbe. On peut considérer qu'ils ont compris qu'un tableau de valeurs ne donne qu'une information partielle sur une fonction. Néanmoins, s'ils sont capables de tracer des courbes très différentes associées à un même tableau de valeurs, ils ont beaucoup plus de difficultés à trouver des tableaux de variations différents à partir du même tableau de valeurs. Deux types de raisons peuvent être suggérés. D'une part, il semble bien que le tableau de variations ne jouisse pas d'une grande autonomie, dans le sens où il est lié à une lecture dynamique de la courbe, ainsi certains élèves ne peuvent-ils pas passer directement d'un tableau de valeurs à un tableau de variations sans passer par l'intermédiaire de la courbe. D'autre part, il se peut aussi que les deux objets soient trop proches d'un point de vue sémiotique pour que les élèves arrivent facilement à imaginer des variantes de tableaux de variations pour un même tableau de valeurs. Il faut en effet introduire dans un registre très proche, de nouvelles valeurs qui n'apparaissent pas dans le tableau de valeurs initial. De plus, se rajoute la différence entre le traitement du registre numérique et celui du registre graphique : dans le registre numérique, on associe certainement nombres et calculs (un nombre apparaît souvent comme le résultat d'un calcul) alors que dans le registre graphique la construction d'une courbe peut apparaître moins contrainte. Il ressort donc de cette analyse que le tableau de variations reste un outil avec peu d'autonomie, c'est avant tout un moyen de codage de données issues d'une lecture de la courbe. Le traitement dans ce registre de représentation reste problématique pour les élèves. D'autre part si la conversion à partir de ou vers le registre graphique ne semble pas poser de problème, la conversion à partir du registre des tableaux de valeurs reste problématique.

Tous ces résultats sont évidemment très liés aux conditions de réalisation et au choix des problèmes étudiés. Les interprétations proposées restent donc largement hypothétiques et le nombre de productions analysées est relativement faible (surtout pour l'activité 1). Il serait notamment intéressant d'étudier ces activités à plus large échelle et de rendre compte des problèmes que nous avons rencontrés lors de leur application.

Enfin, en dépassant le sujet de la thèse, cette étude nous a donné des éléments sur le travail du professeur : elle montre tout d'abord, qu'il est difficile pour un professeur, même expérimenté, de s'approprier vraiment un scénario de cours s'il est loin de sa pratique habituelle, même si un travail commun a été fait. En outre, nous avons vu que des exercices relativement ouverts, avec des réponses multiples, permettant de travailler des questions comme la non correspondance entre tableau de valeurs et courbe, sont massivement rejetés par les enseignants du fait de ces caractéristiques.

# *REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES*

ARSAC, G. & al. (1989) La transposition didactique en mathématiques, In IREM et LIRDHIST de Lyon (eds.), *La transposition didactique en mathématiques, en physique et biologie,* pp. 3-36.

ARTAUD, M. (1997) Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. In C. Comiti et al. (eds) *Actes de la IX° école d'été de didactique des mathématiques,* Houlgate, pp. 101-139.

ARTAUD, M. et TONNELLE, J. (1995) Le rôle des professeurs dans la formation du curriculum réel, In R. Noirfalise et M.-J. Perrin (eds), *Actes de la VIII° école et université d'été de didactique des mathématiques*, IREM de Clermont-Ferrand, pp. 123-137.

ARTIGUE, M. (1993) Enseignement de l'analyse et fonctions de référence. *Repère IREM,* **11**, 115-139.

ASSUDE, T. (1996) De l'écologie et de l'économie d'un système didactique : une étude de cas, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **16/1**, 47-71.

BASTURK, S. (2003) *L'enseignement des mathématiques en Turquie : le cas des fonctions au lycée et au concours d'entrée à l'université.* Thèse doctorat, Université Denis Diderot - Paris 7.

BLOCH, I. (2000) *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée / université. Savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation.* Thèse doctorat, Université Bordeaux I.

BLOCH, I. (2002) Un milieu graphique pour l'apprentissage de la notion de fonction au lycée, *Petit x*, **n° 58**, 25-46.

BOLON, J. (1996) *Comment les enseignants tirent-ils partie des recherches faites en didactiques des mathématiques ?* Paris : Université Paris 5.

BOSCH, M. et CHEVALLARD, Y. (1999) La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **19/1**, 77-123.

BROUSSEAU, G. (1988) Le contrat didactique : le milieux, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **7/2**, 309-336.

BROUSSEAU, G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, **9/3**, 309-336.

BROUSSEAU, G. (1988) Le contrat didactique : le milieux, *Recherche en Didactiques des Mathématiques*, **7/2**, 33-115.

CAPPONI, B. et SUTHERLAND, R. (1998-99) Interaction des cadres algébriques et graphiques dans la résolution de problèmes, *Petit x,* **n° 50**, 32-67.

CHAUVAT, G. (1998-99) Courbes et fonctions au collège, *Petit x,* **n° 51**, 23-44.

CHEVALLARD, Y. (1995 – 96) Les outils sémiotiques du travail mathématique, *Petit x,* **n° 42**, 23-41.

CHEVALLARD, Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **19/2**, 222-265.

CHEVALLARD, Y. (1991) *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*, Grenoble : La Pensée Sauvage éditions (2ère édition).

CONNE, F. (1992) Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **12/2.3**, 221-270.

CONNE, F. (1997) L'activité du couple enseignant/enseigné, In C. Comiti et al. (eds) *Actes de la IX° école d'été de didactique des mathématiques,* Houlgate, pp. 15-24.

COULANGE, L. (2000) *Etude des pratiques du professeur du double point de vue écologique et économique. Cas de l'enseignement des systèmes d'équations et de la mise en équation en classe de Troisième,* Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier – Grenoble I.

COULANGE, L. (2001) Enseigner les systèmes d'équations en Troisième, Une étude économique et écologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **21/3**, 305-354.

DOUADY, R. (1987) Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **7/2**, 5-32.

DUPIN, J.J. (1995) Modèles et modélisation dans l'enseignement, quelques contraintes didactiques, *Actes de la VIIIème Ecole d'Eté de didactique des mathématiques,* IREM de Clermont-Ferrand.

DUVAL, R. (1988) Graphiques et équations : l'articulation de deux registre. *Annales de didactique et de sciences cognitives* **1**, 235-253, IREM de Strasbourg.

DUVAL, R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensé, *Annales de didactique et de Sciences Cognitives* **5**, 37-65, IREM de Strasbourg.

DUVAL, R. (1996) Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **16/3**, 349-386.

DUVAL, R. (1998) Signe et objet (I) : Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet, *Annales de didactique et de science cognitives* **6**, 165-196, IREM de Strasbourg.

GAUDIN, N. (1999) *Caractérisation des conceptions du concept de fonction*, Mémoire de DEA, Université Joseph Fourier, Grenoble.

GERMI, P-E. (1996-97) Statut des lettres et notion de variable. *Petit x*, **n° 45**, 59-79.

Groupe « Lycée » - IREM de Clermond-Fd (1993), Introduction à la notion de fonction en seconde de lycée, *Repère n° 10*, 47-57.

GUZMAN-RETAMAL, I. (1989) Registre mis en jeu par la notion de fonction, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* **2**, 229-259, IREM de Strasbourg.

HITT-ESPINOSA, F. (1998) Systèmes sémiotiques de représentation liés au concept de fonction, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* **6**, 7-26, IREM de Strasbourg.

IREM Poitiers (1999) Enseigner les mathématiques. Didactique Pédagogie Mathématiques Histoire, *Groupe « Didactique »*, Fascicule 1, Mai 1999.

IREM de Montpellier (2000) *L'algèbre au lycée et au collège*, Actes des journées de formation de formateurs, 4-5 juin 1999, Boisseron.

LACASTA, E. (1995) *Les graphique cartésiens de fonctions dans l'enseignement secondaire des mathématiques : illusions et contrôle*, Thèse de doctorat, Université Bordeaux I.

LE VAN, T. (2001) *Etude didactique de liens entre fonctions et équations dans l'enseignement des mathématiques au lycée en France et au Viêt-nam*, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier – Grenoble I.

LEROUGE, A. (2000) La notion de cadre de rationalité. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **20/2**, 172- 206.

MARCHADIER, L. (2003) *Les fonctions : liens entre les cadres numérique, algébrique et graphique*, Mémoire professionnel, IUFM de Créteil.

MASCHIETTO, M. (2001) Fonctionnalité des représentations graphiques dans la résolution de problèmes d'analyse à l'Université, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **21/1.2**, 123-156.

NADIA, A. (2004) *Enseignement des fonctions en France et en Palestine. Analyse comparative de deux choix de transposition didactique*, Thèse de doctorat, Université Paris VII.

NEYRET, R. (1995) *Contraintes et déterminations des processus de formation des enseignants : nombres décimaux, rationnels et réels dans les Instituts Universitaires de Formation des Maîtres*, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier – Grenoble I.

RAVEL, L. (2003) *Des programmes à la classe : étude de la transposition didactique interne. Exemple de l'arithmétique en Terminale S spécialité mathématique,* Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble I.

RENE DE COTRET, S. (1988) Une étude sur les représentations graphiques du mouvement comme moyen d'accéder au concept de fonction ou de variable dépendante, *Petit x,* **n° 17**, 5-27.

ROBERT, A (2001) Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **21/1.2**, 57-79.

ROBERT, A. (1993) Eléments de réflexion sur l'utilisation des calculatrices programmables en Premier S et en Terminale C et E, *Repère 11*.

ROBERT, A. (1998a) Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **18/2**, 139-170.

ROBERT, A. (1998b) Réflexions sur l'analyse des textes d'exercices des manuels, *Cahier de didactique des mathématiques,* **n° 51**, IREM de Paris.

ROULET, N. (2003) *Registre de représentation et notion de fonction en classe de seconde,* Mémoire professionnel, IUFM de Lyon.

RUIZ-HIGUERA, L. (1995) Conception des élèves du secondaire sur la notion de fonction : Analyse épistémologique et didactique, In R. Noirfalise et M.-J. Perrin (eds), *Actes de la VIII° école et université d'été de didactique des mathématiques, pp. 405-410.*

TEISSIER, Y. (1998) *Une étude sur les notions de variable réelle et d'intervalle numérique relativement à l'enseignement de la notion de fonction en classe de 2^nde^*, Mémoire de DEA, Université Joseph Fourier Grenoble I.

TROUCHE, L. (1997) *A propos de l'apprentissage des limites de fonctions dans un environnement calculatrice, étude des rapports entre processus de conceptualisation et processus d'instrumentation*, Thèse de doctorat, Université Montpellier II.

VERGNES, D. (2000) *Analyse des effets d'un stage de formation continue en géométrie sur les pratiques d'enseignants de l'école primaire,* Paris : Université Paris 5.

YAVUZ, I. (2001) *Les procédures utilisées par les élèves de seconde professionnelle dans les changements de registres de représentation sémiotique,* Mémoire de DEA, Université Lyon 1.

YOUSCHKEVITCH, A. (1976) The concept of function up to the middle of 19thcentury, Archive for history of exact sciences, tome 16, pp. 36-85, traduction française de Jean-Marc Bellemin, « Fragments d'histoire des mathématiques », *Brochure A.P.M.E.P.*, **n° 41**, 1981, 7-68, Paris.

## Manuels scolaires et programmes officiels

### Manuel scolaires

BONTEMPS, G. (2000) *Maths 2$^{de}$*, Collection Fractale, Edition Bordas.

CETINEL, Z., KAVCAR, M., YILDIZ, Y. (1998) *Manuel des mathématiques classe de seconde, Edition de l'Education Nationale*, Maison d'édition de l'Université Anadolu, Eskisehir.

KOECHLIN, B. et SIMSOLO P. (2000) *Mathématiques 2$^{de}$*, Collection Nouveau Pythagore, Edition Hatier.

MALAVAL, J. et COURBON, D. (2000) *Math 2$^{e}$*, Collection Hyperbole, Edition Nathan.

MISSET, L. (2000) *Maths Seconde*, Collection Déclic, Edition Hachette.

### Textes des programmes ou accompagnements

Classe de troisième :

- Programme de 1999 : B.O. hors-série n° 10 du 15 Octobre 1998.

Classe de seconde :

- Programme de 2000 : B.O. hors-série n° 6 du 12 août 1999.

  Accompagnement de ce programme est disponible sur le site Internet du CNDP à l'adresse suivante : http://www.cndp.fr/textes_officiels/lycee/maths/sec/p_smaths.htm

- Programme de 1990 : B.O. n° 20 du 17 mai 1990.

- Programme de 1986 : B.O. spécial n° 1 du 5 février 1987.

- Programme de 1980 : B.O. spécial n° 1 du 5 mars 1981.

# ANNEXES

# ANNEXES B2

## Analyse écologique des manuels actuels (édition 2000)

## *Analyse praxéologique de tous les types de tâches relatifs à l'introduction de la notion de fonctions.*

Pour cette étude, nous avons utilisé les notations suivantes.

$\mathcal{T}_{nom}$ : les types de tâche,

$t_{nom}$ : les techniques d'étude de cette tâche

$k_{nom}$ : les éléments technologico- théoriques relatifs à cette tâche

***$\mathcal{T}_{imA}$* : Calculer l'image d'une valeur de x pour une fonction connue par son expression algébrique.**

$t_{imA}$ : remplacer x par une valeur dans l'expression algébrique et calculer.

$k_{imA}$ : substitution de 'x' par une valeurs et fondement de l'algèbre.

Constat : Cette tâche est connue depuis le collège.

***$\mathcal{T}_{anA}$* : Trouver par le calcul les antécédents d'une valeur (a) pour une fonction connue par son expression algébrique.**

$t_{anA}$ : résoudre l'équation '$f(x) = a$' et les sous tâches algébriques.

$k_{anA}$ : définition de ce qu'est un antécédent.

Constat : Cette tâche est connue depuis le collège mais on n'utilise pas le mot 'antécédent' en collège.

***$\mathcal{T}_{imG}$* : Trouver graphiquement l'image d'une valeur (a) pour une fonction connue par sa représentation graphique.**

$t_{imG}$ : tracer une parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point (a ; 0), noter l'intersection avec la courbe puis lire la valeur de la seule ordonnée correspondante.

$k_{imG}$ : connaissances sur la représentation dans une repère d'une fonction et définition de ce qu'est une image.

Constat : cette tâche est connue depuis le collège

***$\mathcal{T}_{anG}$* : Trouver graphiquement les antécédents d'une valeur (a) pour une fonction connue par sa représentation graphique.**

$t_{anG}$ : tracer une parallèle à l'axe des abscisses passant par (0 ; a). Noter les intersections éventuelles avec la courbe puis lire les abscisses correspondantes.

$k_{anG}$ : connaissances sur la représentation dans une repère d'une fonction et définition de ce qu'est un antécédent.

Constat : cette tâche est connue depuis le collège mais on n'utilise pas le mot « antécédent » en collège. On peut aussi dire que ces deux tâches ($\mathcal{T}_{imG}$ et $\mathcal{T}_{anG}$) sont beaucoup plus proches que les deux tâches précédentes ($\mathcal{T}_{imA}$ et $\mathcal{T}_{anA}$) en terme de traitement.

***$\mathcal{T}_{A\text{-}G}$* : Tracer la représentation graphique d'une fonction affine connaissant son expression algébrique.**

$t_{A\text{-}G1}$ : tracer deux points puis les joindre par une droite.

$t_{A\text{-}G2}$ : tracer un point et utiliser la pente.

$t_{A\text{-}G3}$ : utiliser l'ordonné à l'origine et la pente.

$k_{A\text{-}G1}$ : la courbe représentative d'une fonction affine est une droite et deux points déterminent une et une seule droite.

$k_{A\text{-}G2}$ : la courbe représentative d'une fonction affine est une droite et un point et la pente déterminent une et une seule droite.

$k_{A\text{-}G3}$ : définition de l'ordonnée à l'origine et de la pente.

Constats : Cette tâche est connue depuis le collège. Mais on utilise plutôt la technique $t_{A\text{-}G1}$.

Par ailleurs ce type de tâche entre dans le type plus général « tracer la courbe représentative d'une fonction », mais en classe de seconde seules les fonctions affines, puis les fonctions du seconde degré sont au programme. Le cas particulier des fonctions affines, par son lien avec la géométrie, justifie que l'on en fasse un cas à part, d'autant que les techniques sont bien spécifiques.

***$T_{G\text{-}A}$ : Trouver l'expression algébrique d'une fonction affine connaissant sa représentation graphique.***

$t_{G\text{-}A1}$ : choisir deux points dont les coordonnées sont connues ou lisibles sur la courbe puis construire le système 2x2 à partir de la relation y=ax+b, ensuite le résoudre.

$t_{G\text{-}A2}$ : choisir deux points et déterminer le coefficient 'a' en utilisant la proportionnalité puis déterminer l'ordonnée à l'origine 'b' en construisant une équation.

$t_{G\text{-}A3}$ : choisir un point, lire la pente sur la représentation puis construire l'équation et la résoudre.

$t_{G\text{-}A4}$ : lire l'ordonnée à l'origine et la pente sur le graphique donner directement l'expression algébrique de la fonction.

$k_{G\text{-}A1}$ : interprétation graphique et règles de résolution des systèmes 2x2.

$k_{G\text{-}A2}$ : interprétation graphique, les accroissements des valeurs de f(x) sont proportionnels aux accroissement de la variable x (le coefficient de proportionnalité des accroissements est le nombre a ) et règles de systèmes 2x2.

$k_{G\text{-}A3}$ : interprétation graphique, définition de la pente et règles de résolution des systèmes 2x2.

$k_{G\text{-}A4}$ : interprétation graphique et les définitions de ce que sont l'ordonnée à l'origine et la pente.

Constat : Cette tâche est connue depuis le collège. On utilise plutôt la technique $t_{61}$ dans les manuels de troisième en collège.

***$T_{intA}$ : Trouver par le calcul l'image réciproque d'un intervalle pour une fonction connue par son expression algébrique. (exemple : Pour f(x) = 2x-3, trouver les nombres x tel que f(x)≥-4)***

$t_{intA}$ : poser puis résoudre l'inéquation.

$k_{intA}$ : les règles de la résolution d'une inéquation.

***$\mathcal{T}_{intG}$* : Trouver graphiquement l'image réciproque d'un intervalle pour une fonction connue par sa représentation graphique. (exemple : Pour f(x) = 2x-3, trouver graphiquement les nombres x tel que f(x)≥a)**

$t_{intG}$ : tracer une parallèle à l'axe des abscisses passant par les points f(x) = a. Noter les intersections éventuelles avec la courbe puis construire les intervalles avec ces points intersections ensuite choisir le(les) bon(s) intervalle(s).

$k_{intG}$ : connaissance sur la représentation dans une repère d'une fonction et sur l'inégalité.

***$\mathcal{T}_{Gcrb}$* : Reconnaître si une courbe est la représentation ou non d'une fonction.**

$t_{Gcrb}$ : une courbe représente une fonction si et seulement si, toute parallèle à l'axe des ordonnées coupe la courbe en un seul point.

cas particulier : une droite non parallèle à l'axe des ordonnées est la représentation graphique d'une fonction affine.

$k_{Gcrb}$ : la définition de ce qu'est une fonction : un élément de l'ensemble de définition a une image et une seule.

***$\mathcal{T}_{imL}$* : Trouver par le calcul, l'image d'une valeur pour une fonction définie en langue naturelle.**

$t_{imL1}$ : convertir d'abord en registre algébrique puis traiter comme dans $\mathrm{T}_{imA}$

$t_{imL2}$ : calculer directement dans le registre arithmétique.

$k_{imL1}$ : conversion de la langue naturelle en registre algébrique.

$k_{imL2}$ : règles du calcul l'arithmétique.

***$\mathcal{T}_{anL}$* : Trouver par le calcul, les antécédents d'une valeur pour une fonction définie en langue naturelle.**

$t_{anL1}$ : convertir d'abord en registre algébrique puis traiter comme dans $\mathrm{T}_{anA}$

$t_{anL2}$ : calculer directement dans le registre arithmétique

$k_{anL1}$ : conversion de la langue naturelle en registre algébrique

$k_{anL2}$ : règles du calcul arithmétique

Constat : On peut dire que ces 4 tâches « $\mathrm{T}_{imA}$, , $\mathrm{T}_{imG}$, $\mathrm{T}_{anG}$, $\mathrm{T}_{imL}$ » sont très proches l'une à l'autre. Parce que ce sont des calculs directes. Par contre les tâches « $\mathrm{T}_{anA}$ et $\mathrm{T}_{anL}$ » sont des calculs indirectes.

***$\mathcal{T}_{tvlA}$* : Compléter (ou construire) un tableau de valeurs pour une fonction donnée par son expression algébrique.**

$t_{tvlA}$ : utiliser les techniques $t_{imA}$ et $t_{anA}$

***$\mathcal{T}_{tvlG}$* : Compléter (ou construire) un tableau de valeurs pour une fonction donnée par son représentation graphique.**

$t_{tvlG}$ : utiliser les techniques $t_{imG}$ et $t_{anG}$

***$T_{Gvie}$* : Représenter graphiquement une fonction donnée par un tableau de valeurs dans un contexte de la vie concrète.**

$t_{Gtvl}$ : tracer les points de la courbe correspondant aux valeurs du tableau, joindre ces points en utilisant le contexte « concret » de la fonction

$k_{Gtvl}$ : règles de représentation graphique des fonctions

***$T_{EA}$* : Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction définie par son expression algébrique.**

Cette tâche se décline en seconde selon deux types de fonctions qui conduisent chacun à une technique spécifique.

$t_{EA}$ :

- si la formule possède un dénominateur où figure la variable x ;

exclure les valeurs de x qui annulent le dénominateurs

- si la formule possède une racine carrée sous laquelle figure la variable x ;

exclure les valeurs de x qui rendrent l'expression sous la racine strictement négative.

$k_{EA}$ :

- définition de la division (on ne peut pas diviser par 0)

- définition de la racine carrée ( on ne peut pas calculer la racine carrée d'un nombre strictement négatif)

***$T_{tvl\text{-}G}$* : Donner une ou plusieurs représentation graphique correspondant à un tableau de valeurs donné.**

$t_{tvl\text{-}G}$ : placer les poins dans un repère puis les lier comme on veut en respectant la définition d'une fonction.

$k_{tvl\text{-}G}$ : règles de représentation graphique d'une fonction.

***$T_{L\text{-}A}$* : Donner l'expression algébrique pour une fonction définie en langue naturelle.**

$k_{L\text{-}A}$ : conversion de la langue naturelle en registre algébrique

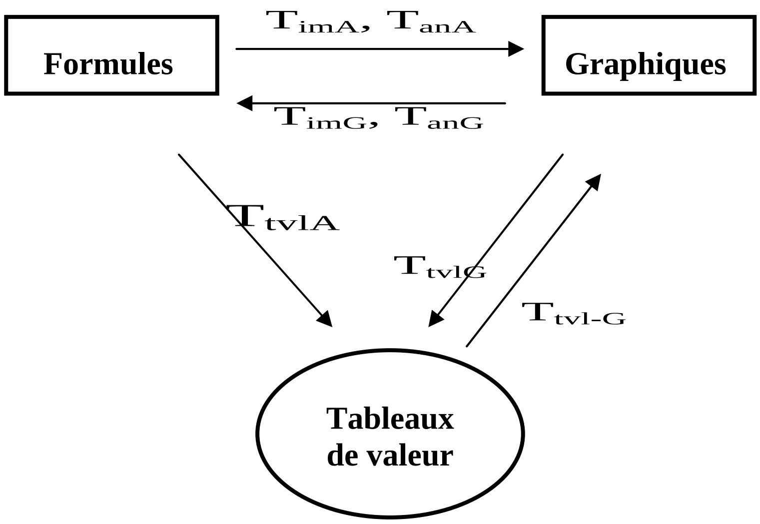
***$T_{inG}$* : Résoudre graphiquement équation et inéquation du type f(x) = g(x) ) et f(x)≥g(x) pour les fonctions définies par ses représentations graphiques.**

$t_{inG}$ : regarder $t_{imG}$ ou $t_{anG}$

$k_{inG}$ : regarder $k_{imG}$ et $k_{anG}$.

***$T_{A\text{-}G\text{-}tvl}$* : associer chaque formule à un tableau de valeurs et à un représentation graphique (on donne, par exemple, 4 formules, 4 tableaux de valeurs et 4 représentations graphiques).**

Il y a plusieurs sous tâches apparaissent dans cette tâche :




***$T_{tvrG}$* : Construire le tableau de variations d'une fonction donnée par sa représentation graphique.**

$t_{tvrG}$ : lire graphiquement les intervalles sur lesquels la fonction est monotone, construire à partir des valeurs de ces intervalles le tableau de variations en précisant avec les flèches le sens de variations de la fonction.

$k_{tvrG}$ : définition de ce qu'est un tableau de variations et des règles de construction d'un tel tableau. Savoir repérer graphiquement la monotonie d'une fonction sur un intervalle.

***$T_{vrG}$* : Décrire, dans le registre de la langue naturelle, les variations d'une fonction donnée par sa représentation graphique.**

$t_{vrG}$ : trouver les intervalles où la fonction est monotone et dire le sens de variations de la fonction

$k_{vrG}$ : définition de la monotonie d'une fonction.

Constat : Cette tâche est très proche de $T_{tvrG}$, la seule différence réside dans le « registre » dans lequel la réponse est fournie.

***$T_{tvrA}$* : Construire le tableau de variations d'une fonctions définie par son expression algébrique. (ou étudier le sens de variation d'une fonction définie par son expression algébrique)**

$t_{tvrA}$ : trouver d'abord les intervalles sur lesquelles la fonction est monotone, utiliser les valeurs de ces intervalles et construire le tableau de variations.

$k_{tvrA}$ : définition de ce qu'est un tableau de variations et des règles de construction d'un tel tableau.

Il y a une sous-tâche qui apparaît ici : la détermination des intervalles où la fonction est monotone.

***$T_{vrA}$* : Montrer qu'une fonction est croissante (ou décroissante) sur un intervalle E définie par son expression algébrique.**

tvrA1 **:** considérer deux éléments quelconques a et b de l'intervalle E tels que « a < b », prouver « f(a) ≤ f(b) ». (Inversement pour la décroissant)

$t_{vrA2}$ : considérer deux éléments quelconques a et b de l'intervalle E tels que « a – b >0 », prouver « f(a) – f(b) ≥ 0 » (inversement pour la décroissante).

$k_{vrA1}$: définition de ce qui sont la croissante et la décroissante et les règles de calcul sur les inégalités.

$k_{vrA2}$ : définition de ce qui sont la croissante et la décroissante et les règles du produit des signes.

***$T_{Gtvr}$* : Donner une ou plusieurs représentations graphiques correspondant à un tableau de variations proposé.**

$t_{Gtvr}$ : placer les points (qui apparaissent dans le tableau de variations) dans un repère puis les relier en respectant le sens de variations de la fonction.

$k_{Gtvr}$ : règles de représentation graphique d'une fonction.

***$T_{tvl-tvr}$* : Donner deux (ou plusieurs) tableaux de variations distincts correspondant à un tableau de valeurs proposé.**

$t_{tvl-tvr}$ : compléter le tableau en signifiant le sens de variation de la fonction et en intercalant éventuellement de nouvelles valeurs.(Pour construire deux tableaux distincts il est indispensable d'intercaler de telle valeurs de façon à modifier la monotonie sur au moins un intervalle).

$k_{tvl-tvr}$ : définition de ce qu'est un tableau de variations et des règles de construction d'un tel tableau.

***$T_{tvr-tvl}$* : Donner deux (ou plusieurs) tableaux de valeurs distincts correspondant à un tableau de variations proposé.**

$t_{tvr-tvl}$ : repérer les valeurs données dans le tableau de variations, ceci serait suffisant pour construire un seul tableau de valeurs, mais l'exigence d'en donner au moins deux distincts oblige à « intervenir » des valeurs pour des points intermédiaires en respectant les contraintes de variation de la fonction.

$k_{tvr-tvl}$ : définition de la croissance et de la décroissance et rapport avec les valeurs de la fonction.

***$T_{vrR}$* : trouver le sens de variation d'une fonction g construite à partir d'une fonction f dont on connaît déjà le sens de variation (par exemple g(x) = f(x) + 3 ou g(x) = (f(x))² )**

$t_{vrR}$ : relier les variations de g à celles de f. il s'agit le plus souvent de revenir à la définition de la croissance et de la décroissance.

$k_{vrR}$ : calcul algébrique et règle de conversion par inégalité.

***$T_{tvrR}$* : Donner le tableau de variation d'une fonction g construite à partir d'une fonction f dont on connaît le tableau de variation.**

ttvrR : on se ramène encore une fois à la tâche $T_{vrR}$

$k_{tvrR}$ : lien entre sens de variation et tableau de variations.

***$T_{intG}$* : Donner un encadrement de f(x) « quand x appartient à différents intervalles comme [a ; b]» pour une fonction définie par sa représentation graphique.**

$t_{intG}$ : tracer deux parallèles à l'axe des ordonnées passant les points (a ; 0) et (b ; 0), noter les intersections avec la courbe puis trouver les extremums dans cet intervalle puis construire l'encadrement avec ces extremums.

$k_{intG}$ : connaissance sur la représentation graphique d'une fonction et sur les extremums.

***$T_{int\text{-}tvr}$ : Donner un encadrement de f(x) « quand x appartient à différents intervalles » pour une fonction définie par son tableau de variation.***

$t_{int\text{-}tvr}$ : situer l'intervalle proposé par rapport au découpage du tableau de variations, puis lire l'encadrement de f(x) à partir du tableau.

$k_{int\text{-}tvr}$ :connaissance sur le tableau de variations d'une fonction.

***$T_{extA1}$ : Montrer qu'une fonction f atteint son maximum (ou son minimum) en « c », définie sur [a ; b] par son expression algébrique.***

$t_{extA1}$ : démontrer la fonction est croissante sur [a ; c] et décroissante sur [c ; b] pour le maximum et à l'inversement pour le minimum.

$t_{extA2}$ : calculer f(c) - f(x) puis démontrer que cette expression est toujours positive pour le maximum ou inversement le minimum.

$k_{extA}$ : définition de ce qui sont le maximum et le minimum.

***$T_{extA2}$ : Trouver les extremums d'une fonction définie sur [a ; b] par son expression algébrique.***

$t_{extA2}$ : Pour cette tâche, on utilise les fonctions de référence « carré, inverse,… » qui sont bien connue par ses représentations graphiques ; conclure l'extremum de la fonction en utilisant la résultat du cours à propos de la sens de la variation pour ces fonctions de référence.

$k_{extA2}$ : lien entre le sens de variation et les extremums.

Constat : Dans cette tâche, quand on n'utilise pas de la fonction de référence comme « fonction carré, fonction inverse,… », la détermination de l'extremum de la fonction est demandée dans les exercices plutôt après l'étude du sens de variation de la fonction.

***$T_{ext\text{-}tvr}$ : Trouver les extremums d'une fonction définie par son tableau de variations.***

$t_{ext\text{-}tvr}$ : c'est une tâche immédiate à partir de la lecture du tableau de variation. Il s'agit de repérer la plus grande et la plus petite valeur de f (x) pour les valeurs de x correspondant aux bornes des intervalles de changement de monotonie.

$k_{ext\text{-}tvr}$ : lecture du tableau de variations et définition de ce qu'est le maximum et le minimum

***$T_{extG}$ : Trouver les extremums d'une fonction définie par son représentation graphique.***

$t_{extG}$ : repérer sur le graphique les points correspondant à la plus petite et à la plus grande ordonnée sur la courbe.

$k_{extG}$ : lecture d'un graphique et définition de ce qu'est le maximum et le minimum.

***$T_{extR}$ : Trouver les extremums d'une fonction g construite à partir d'une fonction f dont on connaît déjà les extremums.***

$t_{extR}$ : il s'agit de décrire les variations de g. On se ramène donc à la tâche $T_{vrR}$.

$k_{extR}$ : lien entre sens de variation et tableau de variations.

Cette tâche est très proche de $T_{extA2}$ le seul différence réside la définition de la tâche : on donne dans la tâche $T_{extA2}$ une seule fonction dans laquelle il y a de fonctions de référence (comme fonction carré, fonction inverse,…), par contre dans la tâche $T_{extR}$, on donne deux fonctions séparément.

***$T_{peiG}$* : Reconnaître si une courbe est celle d'une fonction paire (ou impaire).**

$t_{peiG}$ :si la courbe admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie alors elle est celle d'une fonction paire ; si elle admet l'origine du repère comme centre de symétrie, alors elle est celle d'une fonction impaire.

$k_{peiG}$ :définition de ce qui est une paire et une impaire et leurs conséquences graphiques.

***$T_{picG}$*: Compléter la représentation graphique d'une fonction sachant qu'elle est paire (ou impaire).**

$t_{picG}$ : compléter la courbe en admettant l'axe des ordonnées comme axe de symétrie pour la fonction paire ; en admettant l'origine du repère comme centre de symétrie pour la fonction impaire.

$k_{picG}$ : définition de ce qui est une paire et une impaire et leurs conséquences graphiques.

***$T_{peiA}$* : Trouver si une fonction est paire (ou impaire) donnée par son expression algébrique sur E.**

$t_{peiA}$ :regarder si E est symétrique par rapport à 0 et f(-x) = f(x), dire la fonction est paire ; si f(-x) = -f(x), dire la fonction est impaire.

$k_{peiA}$ : définition de ce qui est une paire et une impaire

***$T_{tvlcP}$* : Compléter un tableau de valeur d'une fonction dans le cas où elle est paire (ou impaire)**

$t_{tvlcP}$ : compléter en utilisant les mêmes images pour les valeurs opposés si elle est paire ; compléter en utilisant les images opposés pour les valeurs opposés si elle est impaire.

$k_{tvlcP}$ : :définition de ce qui est une paire et une impaire et leurs conséquences dans le tableau de valeurs.

***$T_{afTvl}$* : compléter un tableau de valeurs d'une fonction sachant qu'elle est affine, sans déterminer l'expression de cette fonction.**

$t_{afTvl}$ : utiliser la proportionnalité entre l'accroissement de l'image et l'accroissement de la variable

$k_{afTvl}$ : définition de ce qu'est une fonction affine et les règles du calcul algébrique.

***$T_{afTvl}$*: Reconnaître un tableau de valeurs donné s'il est bien celle d'une fonction affine.**

$t_{afTvl}$ : contrôler la proportionnalité entre l'accroissement de l'image et l'accroissement de la variable pour toutes les valeurs apparues dans le tableau, dire si toutes sont égales il est bien celle d'une fonction affine.

$k_{afTvl}$ : définition de ce qu'est une fonction affine et les règles du calcul algébrique.

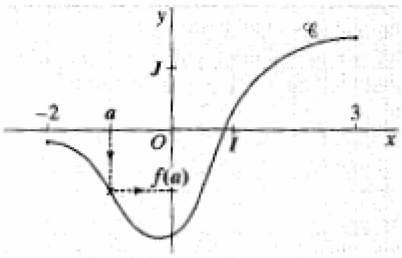
## Quelques copies des pages des manuels analysés

*Manuel Fractale :*

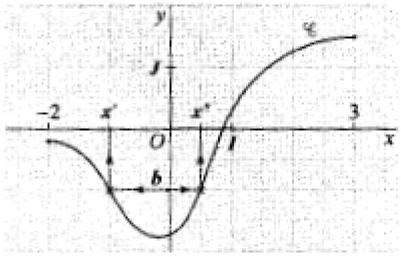
ontrer, à partir
exemples, en
lisant une
lculatrice
raphique
troprojectable,
fonctionnement
un traceur de
urbes.

**EXEMPLE**

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction $f$ définie sur l'intervalle $[-2\,;3]$ .




$a$ étant choisi dans $E$, la courbe permet de localiser son image unique $f(a)$ .




$b$ étant choisi dans $\mathbb{R}$, la courbe permet de localiser ses antécédents : $x'$ et $x''$ .

### Conséquence 2

Quand une fonction $f$ est donnée par une représentation graphique, l'ensemble de définition de $f$ est l'ensemble des abscisses des points de la courbe.

## 3 Tableau de valeurs d'une fonction

### Définition 3

Un tableau de valeurs pour une fonction $f$ montre la correspondance entre des valeurs de la variable $x$ et les valeurs de son image $f(x)$ .

Pour construire un tel tableau, on peut :
- choisir des valeurs quelconques de la variable dans l'ensemble de définition ;
- choisir un « pas », c'est-à-dire un écart régulier entre deux valeurs successives de la variable.

Utiliser une calculatrice rétroprojectable pour montrer le réglage d'un tableau de valeurs.

**EXEMPLE**

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $[-5\,;4]$ par $f(x)=\frac{1}{4}x^2-2x+1$ .

On donne un tableau de valeurs de la fonction $f$, avec un « pas » de 1 .

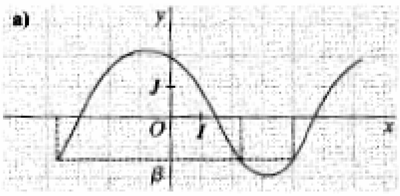
| $x$ | −5 | −4 | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\frac{69}{4}$ | 13 | $\frac{37}{4}$ | 6 | $\frac{13}{4}$ | 1 | $-\frac{3}{4}$ | −2 | $-\frac{11}{4}$ | −3 |

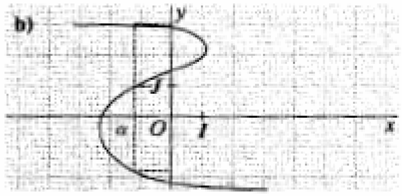
chapitre 5 **Généralités sur les fonctions** 93

# Zoom sur le cours

## 1 Qu'est-ce qu'une fonction ?

Par une fonction, un élément de l'ensemble de définition a **une image et une seule** (toute parallèle à l'axe des ordonnées coupe la courbe en un seul point).
La représentation graphique **a)** est bien celle d'une fonction. En revanche, la représentation graphique **b)** n'est pas celle d'une fonction, car $\alpha$ posséderait trois images).



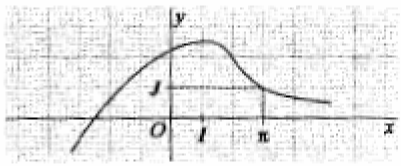

## 2 Courbe représentative d'une fonction

Si une fonction est connue par sa représentation graphique, il faut distinguer les points de la courbe dont les coordonnées sont précisées sur le dessin (ils autorisent des lectures exactes) des autres points (ils n'autorisent que des lectures approchées).

**EXEMPLE**

Pour la fonction ci-contre, on peut lire l'image exacte de $\pi$, et une valeur approchée de l'image de $2$ :

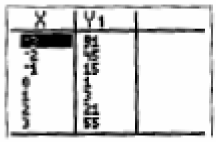
$$f(\pi) = 1 \; ; \quad f(2) \approx 2{,}1 \, .$$




## 3 Tableau de valeurs d'une fonction

Un tableau de valeurs ne donne que **quelques informations** sur une fonction.

- Le tableau de valeurs ci-contre ne permet pas de dire que l'ensemble de définition de la fonction est $[-3\,;3]$ : on ne sait pas si les nombres de cet intervalle, qui ne sont pas des entiers, ont une image.
- À un même tableau de valeurs peuvent donc correspondre plusieurs fonctions, soit plusieurs représentations graphiques différentes (voir ci-dessous).



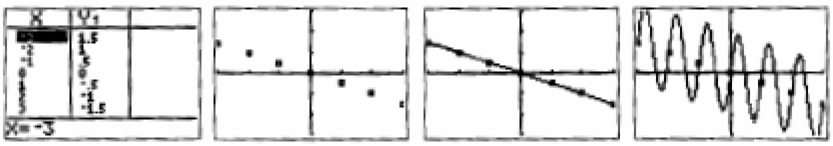



**Tableau de valeurs** — **Points correspondants** — **Deux courbes possibles pour ce même tableau de valeurs**

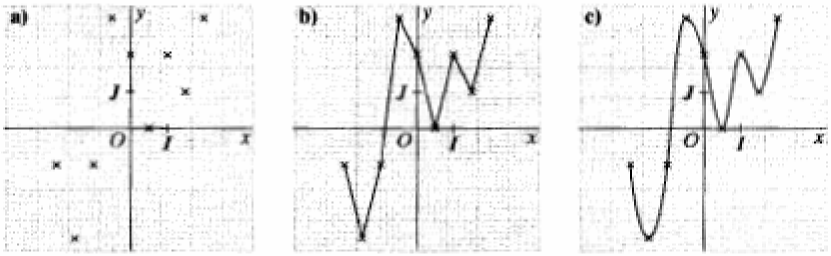
# Modules

## Module 3 Savoir raisonner

$f$ est une fonction définie sur l'intervalle $[-2\,;2]$ dont on donne un tableau de valeurs.

| $x$ | $-2$ | $-1{,}5$ | $-1$ | $-0{,}5$ | $0$ | $0{,}5$ | $1$ | $1{,}5$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-1$ | $-3$ | $-1$ | $3$ | $2$ | $0$ | $2$ | $1$ | $3$ |

Trois élèves proposent ci-dessous une représentation graphique de $f$.
Commenter chacune des propositions.




## Module 4 Savoir argumenter

On considère des fonctions définies sur l'intervalle $[0\,;1]$. Pour chacune d'entre elles, on donne une formule, un tableau de valeurs et une représentation graphique.
Associer chaque formule à un tableau de valeurs et à une représentation graphique.
Dans chaque cas, on précisera les critères du choix.

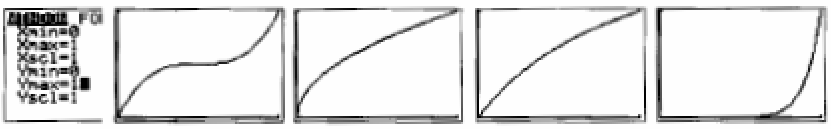
- **Formules**

$f(x)=\sqrt{x}$ ; $\quad g(x)=4\left(x-\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{2}$ ; $\quad h(x)=x^{10}$ ; $\quad i(x)=\frac{2x}{x+1}$ .

- **Tableau de valeurs**

| $x$ | 0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **fonction 1** | 0 | 0,447 213 6 | 0,632 455 53 | 0,774 596 67 | 0,894 427 19 | 1 |
| **fonction 2** | 0 | 0,333 333 33 | 0,571 428 57 | 0,75 | 0,888 888 89 | 1 |
| **fonction 3** | 0 | 0,392 | 0,496 | 0,504 | 0,608 | 1 |
| **fonction 4** | 0 | $1{,}024\times10^{-7}$ | 0,000 104 86 | 0,006 046 62 | 0,107 374 18 | 1 |

- **Représentations graphiques** (à gauche, la « fenêtre » choisie pour les quatre fonctions)




**Représentation 1** **Représentation 2** **Représentation 3** **Représentation 4**

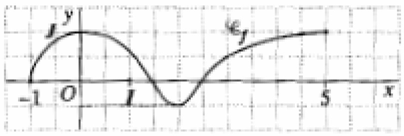
# Zoom sur le cours

## A Tableau de variations d'une fonction et représentation graphique

À une courbe donnée correspond un seul tableau de variations possible, mais, inversement, à un tableau de variations donné, on peut associer plusieurs courbes différentes.

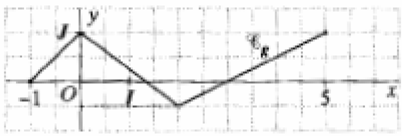
**Exemple**

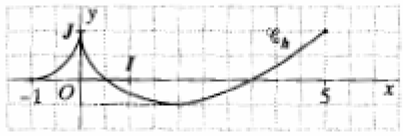
Soit la courbe représentative de la fonction $f$ ci-dessous. La lecture de cette représentation permet de dresser le tableau de variations de $f$.




| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $2$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $0$ | ↗ | $1$ | ↘ | $-\frac{1}{2}$ | ↗ | $1$ |

Inversement, ce tableau de variations peut correspondre à plusieurs représentations graphiques, par exemple celles des fonctions $g$ et $h$ représentées ci-dessous.




## B Tableau de variations d'une fonction et tableaux de valeurs

À un tableau de valeurs donné peuvent correspondre plusieurs tableaux de variations et, inversement, à un tableau de variations donné, on peut associer plusieurs tableaux de valeurs différents.

**Exemple**

Soit le tableau de valeurs de la fonction $f$ donné ci-dessous. Les tableaux de variations A et B sont tous les deux compatibles avec ce tableau de valeurs.

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ | $2$ | $3$ | $1$ | $-2$ |

| $x$ | $-1$ | | $1$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $0$ | ↗ | $3$ | ↘ | $-2$ |

**Tableau A**

| $x$ | $-1$ | | $0{,}5$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $0$ | ↗ | $4$ | ↘ | $-2$ |

**Tableau B**

Inversement, le tableau de variations A peut correspondre à plusieurs tableaux de valeurs, sur le même intervalle et avec le même pas, par exemple à ceux des fonctions $g$ et $h$.

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $0$ | $0{,}5$ | $3$ | $-1$ | $-2$ |

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | $0$ | $2{,}5$ | $3$ | $2{,}5$ | $-2$ |

*Hyperbole*

Hyperbole



# Les méthodes

## Exercice résolu 1 — Définir une fonction par une formule

▸ VOIR AUSSI EXERCICE 18 PAGE 96

**ÉNONCÉ :** À chaque réel $x$ de l'intervalle $[2\,;+\infty[$ on associe $f(x)=\sqrt{x-2}$.

**a)** Définit-on ainsi une fonction $f$ ?

**b)** Le nombre réel 5 appartient-il à l'ensemble de définition de $f$ ? Si oui, calculer l'image de 5.

**SOLUTION**

**a)** Si $x\in[2\,;+\infty[$ alors $x\geqslant 2$ c'est-à-dire $x-2\geqslant 0$, donc on peut calculer $\sqrt{x-2}$. Ainsi tout nombre réel $x$ de $[2\,;+\infty[$ a une image et une seule par $f$ et l'on définit bien une fonction.

**b)** L'ensemble de définition de $f$ est : $D=[2\,;+\infty[$, donc : $5\in D$.
$f(5)=\sqrt{5-2}=\sqrt{3}$ donc l'image de 5 par $f$ est $\sqrt{3}$.

## Exercice résolu 2 — Définir une fonction par un tableau de valeurs

▸ VOIR AUSSI EXERCICE 21 PAGE 96

**ÉNONCÉ :** On lâche une bille d'acier d'une hauteur $h$ (en m) et on mesure le temps $t$ (en s) qu'elle met pour atteindre le sol.
Les résultats sont réunis dans le tableau ci-contre.
Ce tableau définit-il une fonction qui à $h$ associe $t$ ?

| $h$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $t$ | 0,45 | 0,64 | 0,78 | 0,9 | 1 | 1,1 |

**SOLUTION**

À chacun des nombres 1, 2, 3, 4, 5 et 6 est associé un réel et un seul.
Donc ce tableau définit une fonction qui à $h$ associe $t$ ; son ensemble de définition est :
$\{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$.

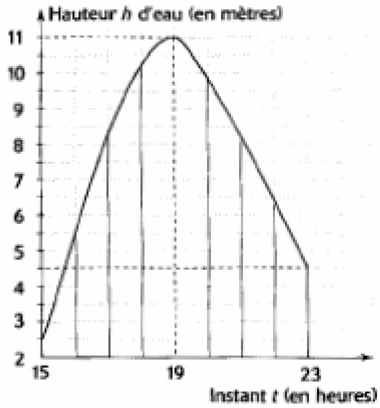
## Exercice résolu 3 — Définir une fonction par une courbe

▸ VOIR AUSSI EXERCICE 23 PAGE 96

**ÉNONCÉ :** Le graphique ci-contre donne la hauteur d'eau dans le port de Saint-Malo entre 15 h et 23 h.

**a)** Ce graphique représente-t-il une fonction ?

**b)** Si oui, lire les images de 19 et 23.




**SOLUTION**

**a)** À chaque instant $t$, compris entre 15 h et 23 h, est associée une hauteur d'eau $h$ et une seule.
Ce graphique représente une fonction définie sur $[15\,;23]$ qui à $t$ associe $h$.

**b)** L'image de 19 est 11.
L'image de 23 est 4,5.

# Les méthodes

Exercice résolu 1

VOIR AUSSI
ERCICE 33 PAGE 98

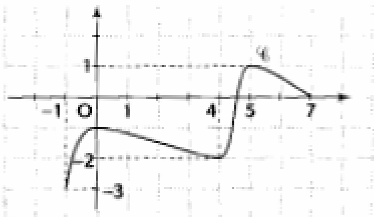
## Dessiner une courbe compatible avec un tableau de variation

**ÉNONCÉ :** Voici le tableau de variation d'une fonction $f$.

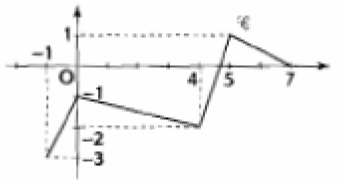
| $x$ | $-1$ | $0$ | $4$ | $5$ | $7$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-3$ ↗ | $-1$ ↘ | $-2$ ↗ | $1$ ↘ | $0$ |

**a)** Quel est son ensemble de définition D ?
**b)** Tracer une courbe $\mathscr{C}$ représentant $f$.

**SOLUTION**
**a)** $x$ varie de $-1$ à 7, donc $D = [-1\,;7]$.
**b)** Voici la courbe $\mathscr{C}$ représentant $f$.




**INFO**
Il n'y a pas une seule façon de tracer une courbe $\mathscr{C}$ compatible avec le tableau de variation de $f$. Voici par exemple une autre courbe $\mathscr{C}$ possible :

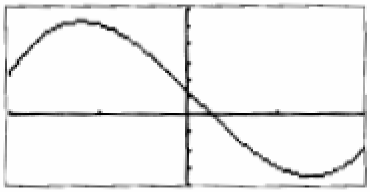



Exercice résolu 2

/OIR AUSSI
RCICE 40 PAGE 99

## Lire, avec prudence, des informations sur un écran graphique

**ÉNONCÉ :** Voici la courbe obtenue à l'écran d'une calculatrice pour une fonction définie sur $[-2\,;2]$.
Quelles informations peut-on donner :
**a)** sur le sens de variation de la fonction $f$ représentée ?
**b)** sur les maximums et minimums de $f$ ?



**SOLUTION**
**a)** $f$ est une fonction croissante sur un intervalle $[-2\,;x_0]$ avec $-2 \leqslant x_0 \leqslant -1$.
$f$ est une fonction décroissante sur un intervalle $[x_0\,;x_1]$ avec $1 \leqslant x_1 \leqslant 2$.
$f$ est une fonction croissante sur $[x_1\,;2]$.
**b)** Sur $[-2\,;2]$, $f(x_0)$ est le maximum de $f$ ; il semble que :
$$5 \leqslant f(x_0) \leqslant 6.$$
Sur $[-2\,;2]$, $f(x_1)$ est le minimum de $f$ ; il semble que :
$$-4 \leqslant f(x_1) \leqslant -3.$$

**INFO**
Sur un écran de calculatrice graphique, les informations sur le sens de variation, les maximums et les minimums ne sont pas exhaustives.

*Pythagore :*

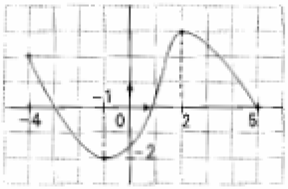
**COURS**

Une fonction constante sur un intervalle I y est à la fois croissante et décroissante, et réciproquement.

**Remarque**
Une fonction croissante conserve l'ordre des antécédents ($a$ et $b$, d'une part, et $f(a)$ et $f(b)$, d'autre part, sont dans le même ordre), tandis qu'une fonction décroissante en inverse l'ordre.

### B. Tableau de variations d'une fonction

Voici, par exemple, la représentation graphique d'une fonction $f$ définie sur $[-4 ; 5]$.




La fonction $f$ est croissante sur l'intervalle $[-1 ; 2]$ et décroissante sur les intervalles $[-4 ; -1]$ et $[2 ; 5]$.

Voici le **tableau de variations** de $f$ :

| $x$ | $-4$ | $-1$ | $2$ | $5$ |
|---|---|---|---|---|
| $f$ | $2$ ↘ | $-2$ ↗ | $3$ ↘ | $0$ |

**Remarque**
On dit que, sur l'intervalle $[-4 ; 5]$, $f$ admet un **maximum** en $x = 2$ et un **minimum** en $x = -1$.
Plus généralement, on donne les définitions suivantes :

Définitions Soit $f$ une fonction définie sur un ensemble E et soit $a$ un réel appartenant à E.

- On dit que $f$ admet un maximum absolu en $a$ lorsque, pour tout $x$ de E, $f(x) \leqslant f(a)$.
- On dit que $f$ admet un minimum absolu en $a$ lorsque, pour tout $x$ de E, $f(x) \geqslant f(a)$.

## Parité et symétrie

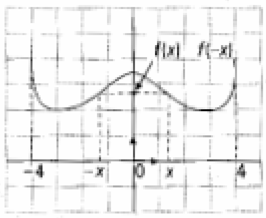
Une partie E de $\mathbb{R}$ est **symétrique par rapport à zéro** si pour tout réel $x$ de E son opposé $(-x)$ appartient à E.

**Exemples :**
Les parties $]-3 ; 3[$ ; $[-4 ; 4]$ et $\mathbb{R}^*$ sont symétriques par rapport à zéro tandis que $]-3 ; 3]$ et $[-1 ; 5]$ ne le sont pas.

Définition Une fonction $f$ définie sur E est **paire** lorsque :
pour tout $x$ de E,

$$\begin{cases} -x \in E \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$$

E est symétrique par rapport à 0



*Déclic :*

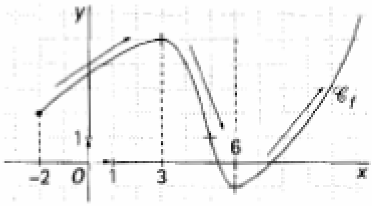
# Variation – Extremum

## ...sa mise en pratique

### Énoncé des variations d'une fonction

► *Voir Exercices 33 à 36*

Une fonction $f$ est donnée par la courbe représentative ci-contre.
Cette fonction est définie sur $[-2 ; +\infty[$.
Sur l'intervalle $[-2 ; 3]$, la fonction $f$ est croissante.
Sur l'intervalle $[3 ; 6]$, la fonction $f$ est décroissante.
Sur l'intervalle $[6 ; +\infty[$, la fonction $f$ est croissante.




### Tableau des variations d'une fonction

► *Voir Exercices 37 à 39*

On résume le sens de variation d'une fonction dans un tableau à double entrée qui se construit en trois étapes :

**première étape**

| | | |
|---|---|---|
| variable | $x$ | |
| image par $f$ | $f(x)$ | |

**deuxième étape**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x$ | | | |
| $f(x)$ | ↗ | ↘ | ↗ |

flèches de variation

**troisième étape**

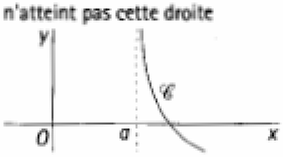
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-2$ | $3$ | $6$ | $+\infty$ | abscisse |
| $f(x)$ | $2$ ↗ | $5$ | ↘ $-1$ | ↗ | ordonnée |

valeurs extrêmes et changement de sens

Sur l'intervalle de définition $[-2 ; +\infty[$, le minimum est $-1$, atteint en $6$, mais la fonction n'a pas de maximum.

### Conventions graphiques

Afin de noter des informations sur une courbe, ce manuel utilise certaines conventions.

| | | |
|---|---|---|
| Le point $A$ est connu avec précision et il est sur la courbe   $A$ est noté par une croix | l'extrémité $A$ est un point de la courbe   $A$ est noté par un gros point | l'extrémité $A$ n'appartient pas à la courbe   $A$ est noté par une « encoche » |
| si on prolonge la courbe en dehors de la fenêtre donnée, la fonction ne change plus de sens de variation   (ce n'est pas toujours le cas dans la fenêtre d'une calculatrice) | une ligne verticale en pointillés indique que la courbe prolongée n'atteint pas cette droite   la valeur $a$ n'est pas dans l'ensemble de définition | une ligne horizontale en pointillés indique que la courbe prolongée n'atteint pas cette droite   la valeur $b$ n'est pas atteinte |

# ANNEXES B3

## Questionnaires des enseignants

*Questionnaire aux enseignants*

- 1

## Questionnaire ( professeurs des mathématiques)

**Nom** : PAGOTTO
**Prénom** : Anne
**Lycée** : Charles Hermite (Dieuze . Moselle)
**Quand avez-vous commencé à enseigner en Seconde ? :** en 2001

**1.a.** Quel est le manuel utilisé dans votre (vos) classe(s) de $2^{nde}$ ?

Déclic (Hachette)

**1.b.** Utilisez-vous d'autres manuels pour la notion de fonction ? Oui
Si oui, lesquels et pour quoi faire ?

Point (Hatier) pour les activités d'introduction, les exercices

**2.** Combien de chapitres consacrez-vous pour l'étude des fonctions ? Trois
Pouvez-vous donner leurs titres dans l'ordre chronologique ?

- Notions de fonction
- Fonctions : variations
- Fonctions de référence

**3.** Quels autres chapitres du programme de $2^{nde}$ vous semblent entretenir un rapport important avec la notion de fonction ?

- Intervalles - Valeurs absolues
- Signe d'une expression
- Systèmes

**4.a.** Donnez-vous une définition explicite de la notion de fonction à vos élèves ? Oui
Si oui, laquelle? Si non, pourquoi ?

Lorsqu'à chaque nombre réel $x$ d'une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$, on associe <u>un seul nombre</u> réel $y$, on dit que l'on définit une fonction $f$ sur $\mathcal{D}$.
On note : $f : x \longmapsto y$ ou $f(x) = y$

**4.b.** Indépendamment des programmes actuels, quelle est votre propre définition (conception) de la notion de fonction ?

Je vois la fonction comme un procédé qui associe deux nombres. Elle peut servir à étudier des situations concrètes (extrema, variations, limites ...)

**5.a.** Définissez-vous explicitement ce qu'est un tableau de valeurs à vos élèves ? Non
Si oui, comment ? Si non, pourquoi ?

Je leur montre ce qu'est un tableau de valeurs à partir d'un exemple. Il me semble qu'une définition explicite serait trop compliquée et abstraite. En général, je leur fait faire leur premier tableau de valeurs pour tracer une courbe.

**5.b.** Indépendamment des programmes actuels, quelle est votre propre définition (conception) du tableau de valeurs ?

Le tableau de valeurs contient une colonne de variables de l'ensemble de définition régulièrement réparties et une colonne contenant les images correspondantes (valeurs approchées)

**5.c.** Quel est le rôle, selon vous, du tableau de valeurs pour la notion de fonction ?

Son rôle est multiple :
- tracé de courbe
- lecture d'extrema (en valeurs approchées souvent)
- comportement de la courbe
- lien "variable - image"

**6.a.** Définissez-vous explicitement ce qu'est un tableau de variations à vos élèves ? Non
Si oui, comment ? Si non, pourquoi ?

Une définition explicite me paraît, là aussi, très compliquée.
Je le traite à partir d'un exemple où la fonction est représentée graphiquement.

**6.b.** Indépendamment des programmes actuels, quelle est votre propre définition (conception) du tableau de variations ?

Le tableau de variation est une représentation stylisée de la courbe avec un certain nombre d'indications importantes : variations, mais aussi extrema, antécédents des extrema, éventuellement valeurs interdites, coordonnées de points de la courbe.

**6.c.** Quel est le rôle, selon vous, du tableau de variations pour la notion de fonction ?

Son rôle est très visuel. Je le vois comme un résumé d'informations sur une fonction qui seraient difficilement compréhensibles écrites les unes derrière les autres.
Il permet d'avoir une idée de la représentation d'une fonction, sans la tracer.

**7.** Voici un exercice de Seconde :

*« Soit une fonction f définie sur l'intervalle [-2 ; 2] dont on connaît les valeurs suivantes:*

| *x* | *-2* | *-1* | *0* | *1* | *2* |
|---|---|---|---|---|---|
| *f(x)* | *-3* | *-1* | *1* | *3* | *5* |

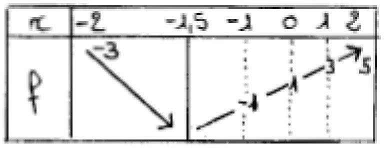
a. *Donner un tableau de variations possible pour f.*

b. *Est-ce qu'on pourrait en trouver un autre ? Si oui, lequel ? Si non, expliquez. »*

**a.** Donnez un corrigé de cet exercice.

a)

b) On pourrait en trouver un autre. Par exemple :



**b.** Poseriez-vous cet exercice à vos élèves de Seconde ? Oui

Explicitez vos raisons.

Cet exercice permet :

- de faire le lien entre tableau de valeurs et tableau de variations et voir que le tableau de valeurs ne donne pas toutes les informations nécessaires.
- de comprendre ce qu'est un tableau de variations.

**c.** Si vous le posiez à des élèves, l'envisageriez-vous comme un exercice

- d'introduction
- d'entraînement x
- de réinvestissement
- une partie d'un DS x
- une partie d'un DM
- autres (précisez)

(Plusieurs réponses sont possibles)

**d.** Quelles seraient, selon vous, les principales difficultés qu'un élève de Seconde pourrait rencontrer dans la résolution de cet exercice ?

Un élève pourrait se faire pieger par le fait que seules les valeurs entières de [-2;2] sont dans le tableau de valeurs.

Ainsi, il n'imaginerait pas qu'entre deux de ces valeurs, il y a des informations non données.

Donc pour lui, puisque $f(-2) < f(-1) < f(0) < f(1) < f(2)$, alors f est croissante sur [-2;2]

**8.** Voici un exercice de Seconde :

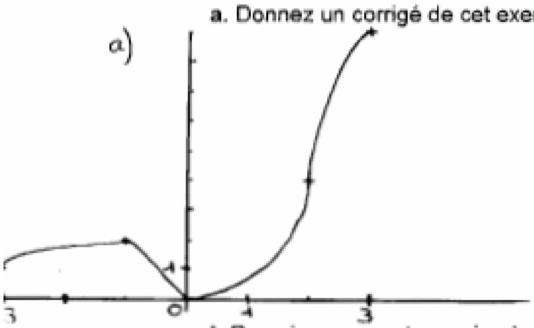
*« Soit une fonction h définie sur l'intervalle [-3 ; 3] et son tableau de variations :*

| $x$ | -3 | -1 | 0 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | 1 | 2 | 0 | 4 | 8 |

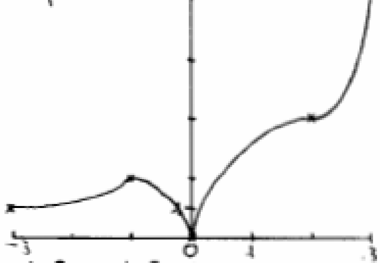
*a. Tracer une représentation graphique possible pour h.*
*b. Est-ce qu'on pourrait en tracer une autre ? Si oui, laquelle ? Si non, expliquez. »*

**a.** Donnez un corrigé de cet exercice.

a)




b) On pourrait en tracer une autre. Par exemple :




**b.** Poseriez-vous cet exercice à vos élèves de Seconde ? Oui
Explicitez vos raisons.

- Il permet de passer d'un tableau de variations à une représentation graphique (je commence par leur montrer l'inverse, c'est à dire une courbe puis le tableau de variations)
- Il permet également de montrer qu'un tableau de variations ne permet pas de tracer exactement la courbe, mais seulement de s'en faire une idée.

**c.** Si vous le posiez à des élèves, l'envisageriez-vous comme un exercice

- d'introduction
- d'entraînement ×
- de réinvestissement
- une partie d'un DS ×
- une partie d'un DM
- autres (précisez) × (exemple dans le cours)

(Plusieurs réponses sont possibles)

**d.** Quelles seraient, selon vous, les principales difficultés qu'un élève de Seconde pourrait rencontrer dans la résolution de cet exercice ?

- Il n'imaginerait pas qu'une fonction croissante sur un intervalle peut se tracer de différentes façons.
- Il envisagerait peut être la seule possibilité de relier tous les points à la règle.

**9.** Voici un exercice de Seconde :

*« Soit une fonction g définie sur l'intervalle [-2 ; 14] dont on connaît les valeurs suivantes :*

| *x* | *-2* | *3* | *8* | *14* |
|---|---|---|---|---|
| *g(x)* | *-7* | *41* | *7* | *34* |

*- Quelle est, à votre avis, la plus petite valeur prise par g sur l'intervalle [-2 ; 14] ? Expliquez.*
*- Quelle est, à votre avis, la plus grande valeur prise par g sur l'intervalle [-2 ; 14] ? Expliquez»*

**a.** Donnez un corrigé de cet exercice.

- On ne peut pas connaître la plus petite valeur prise par g sur [-2;14] car on ne connaît pas les variations de g. Peut-être que $g(0) = -10$
- Il en est de même pour la plus grande valeur. Peut-être que $g(4) = 42$

**b.**Poseriez-vous cet exercice à vos élèves de Seconde ? Oui
Explicitez vos raisons.

Il permet de montrer que sans les variations, on ne peut pas trouver les éventuels extrema.

**c.** Si vous le posiez à des élèves, l'envisageriez-vous comme un exercice

- d'introduction
- d'entraînement x
- de réinvestissement
- une partie d'un DS
- une partie d'un DM
- autres (précisez)

(Plusieurs réponses sont possibles)

**d.** Quelles seraient, selon vous, les principales difficultés qu'un élève de Seconde pourrait rencontrer dans la résolution de cet exercice ?

Il penserait sans doute à une fonction affine par morceaux, sans envisager un "comportement contre-exemple".

Les questions sont posées de telle façon qu'il aurait l'impression que le professeur attend une réponse sous forme de valeur.
Une question plus ouverte du type : "Peut-on donner la plus petite valeur prise par g sur [-2;14]?" lui aurait peut-être mis la "puce à l'oreille".

# ANNEXES B4

## Questionnaires des élèves

<u>*Questionnaire des élèves (A)*</u>

### Questionnaire (A)

**Ce questionnaire est destiné aux élèves de seconde.**
**Merci de répondre aux questions en justifiant vos réponses. S'il vous plait, utilisez le dos de ces feuilles comme brouillon et n'effacez pas.**

**1.** Soit une fonction f définie sur l'intervalle [-2 ; 2] dont on connaît les valeurs suivantes :

| *x* | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| *f(x)* | -3 | -1 | 1 | 3 | 5 |

a. Donner un tableau de variations possible pour f.
b. Est-ce qu'on pourrait en trouver un autre ? Si oui, lequel ? Si non, expliquer.

a)

| $x$ | $-2$ | | $2$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-3$ | $\nearrow$ | $5$ |

b) Non car $f(x)$ est une fonction affine de type $y = mx + p$ car sa representation est une droite croissante sur $-2 ; 2$.
De plus $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ $m = \frac{-1+3}{-1+2}$ $m = \frac{2}{1} = 2$ et pour $x = 0$ $y = 1$

d'où $f(x) : y = 2x + 1$

**2.** Soit une fonction g définie sur l'intervalle [-2 ; 14] dont on connaît les valeurs suivantes :

| *x* | -2 | 3 | 8 | 14 |
|---|---|---|---|---|
| *g(x)* | -7 | 41 | 7 | 34 |

- Quelle est, à votre avis, la plus petite valeur prise par g sur l'intervalle [-2 ; 14] ? Expliquer.

à mon avis c'est -7 car sur la courbe la plus petite valeur est -7

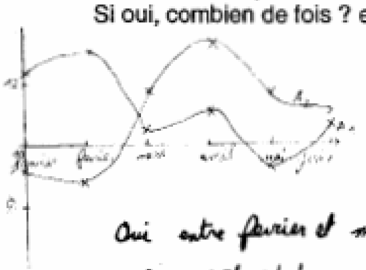
- Quelle est, à votre avis, la plus grande valeur prise par g sur l'intervalle [-2 ; 14] ? Expliquer.

à mon avis c'est 41 car sur la courbe la plus grande valeur connue est 41

**3.** Le tableau ci-dessous donne les cours, en euros, de deux actions au premier semestre 2002 (valeurs de l'action à l'ouverture de la bourse le premier jour ouvrable de chaque mois).

| mois / action | janvier | février | mars | avril | mai | juin |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 12,18 | 12,41 | 10,27 | 11,05 | 9,95 | 10,51 |
| $A_2$ | 9,61 | 8,87 | 11,78 | 13,49 | 11,78 | 10,89 |

A votre avis, est-ce qu'il est possible qu'à un moment donné les cours de ces deux actions aient été identiques ?
Si oui, combien de fois ? et quand ? Si non, expliquer.

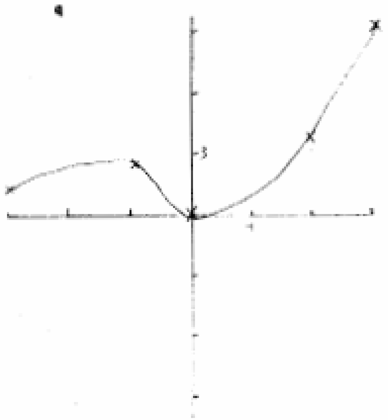


Oui entre février et mars $A_2$ devient supérieur à $A_1$ donc au moins 1 fois les cours de ces deux actions ont été identique. Mais il se peut que entre deux valeur une des actions était grimpé ou chuté très fortement pour revenir à la normale à la fin du mois, il y a donc eu au minimum 1x un moment où les actions on été identique

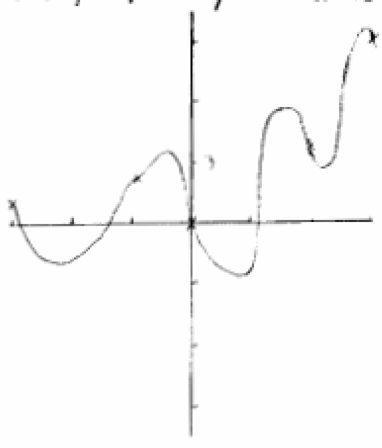
**4.** Soit une fonction h définie sur l'intervalle [-3 ; 3] et son tableau de variations :

| $x$ | -3 | -1 | 0 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | 1 ↗ | 2 ↘ | 0 ↗ | 4 ↗ | 9 |

a. Tracer une représentation graphique possible pour h.
b. Est-ce qu'on pourrait en tracer une autre ? Si oui, laquelle ? Si non, expliquer.



b) on pourrait en tracer plein d'autre car entre deux valeur la courbe peut prendre plein de direction differents



**Questionnaire (B)**

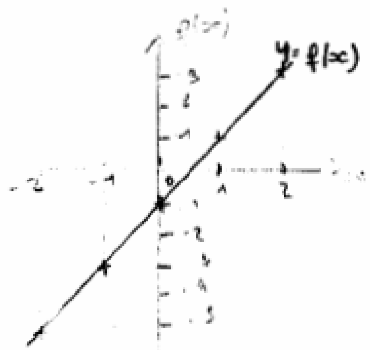
**Ce questionnaire est destiné aux élèves de seconde.**
**Merci de répondre aux questions en justifiant vos réponses. S'il vous plait, utilisez le dos de ces feuilles comme brouillon et n'effacez pas.**

**1.** Soit une fonction f définie sur l'intervalle [-2 ; 2] dont on connaît les valeurs suivantes :

| ***x*** | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| ***f(x)*** | -5 | -3 | -1 | 1 | 3 |

a. Tracer une représentation graphique possible pour f.
b. Est-ce qu'on pourrait en tracer une autre ? Si oui, laquelle ? Si non, expliquer.

b- Non car on place toujours les x en absisse et les f(x) en ordonné.




**2.** Soit une fonction g définie sur l'intervalle [-4 ; 4] dont on connaît les valeurs suivantes :

| ***x*** | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***g(x)*** | -1 | 0 | 7,5 | -1 | -2 | 2 | 6 | 8 | 9 |

- Quelle est, à votre avis, la plus grande valeur prise par g sur l'intervalle [-4 ; 4] ? Expliquer.

La plus grande valeur prise par g est 9 en abssisse 4 car f(4)=9 est la plus grande image.

- Quelle est, à votre avis, la plus petite valeur prise par g sur l'intervalle [-4 ; 4] ? Expliquer.

La plus petite valeur est -2 en abscisse 0 car f(0)=-2 est la plus petite image.

**3.** Le tableau ci-dessous donne les cours, en euros, de deux actions au premier semestre 2002 (valeurs de l'action à l'ouverture de la bourse le premier jour ouvrable de chaque mois).

| *mois* / *action* | janvier | février | mars | avril | mai | juin |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 7,3 | 7,8 | 6,5 | 8,1 | 9,2 | 8,8 |
| $A_2$ | 10,1 | 10,4 | 9 | 7,5 | 7,2 | 8,1 |

A votre avis, est-ce qu'il est possible qu'à un moment donné les cours de ces deux actions aient été identiques ?
Si oui, combien de fois ? et quand ? Si non, expliquer.

Oui, 1 fois entre le mois de mars et avril car avec le graphique on voit que les 2 courbes A1 et A2 se coupent en 1 point ce qui prouve qu'elles sont identiques à ce moment là.

**4.** Soit une fonction h définie sur l'intervalle [-3 ; 3] et son tableau de variations :

| **x** | -3 | -2 | 0 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| **h(x)** | 9 | 4 | 0 | 2 | -1 |

a. Donner un tableau de valeurs possible pour h.
b. Est-ce qu'on pourrait en donner un autre ? Si oui, lequel ? Si non, expliquer.

| $x$ | -3 | -2 | 0 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | + | + | ϕ | + | − |

b. Non, car on ne peut pas changer le sens de la courbe, si la courbe est positive en un point on doit le retrouver dans le tableau de valeur.

## Quelques profils types d’élèves

Au-delà de l’analyse globale que nous avons développé, il nous a paru intéressant de dégager quelques profils types d’élèves. Au vu des résultats, nous avons ainsi faire ressortir quatre profils, deux correspondant à chaque version du questionnaire.

***Questionnaire A***

| **E92** | |
|---|---|
| Question 1 (Tvl $\rightarrow$ Tvr) | a) Il donne un tableau de variations correct (codé **1**) |
| | b) « *non car f(x) est une fonction affine du type* $y = mx + p$ *car sa représentation graphique est une droite croissante sur [-2 ; 2]. De plus* $m = (y_B\text{-}y_A)/(x_B\text{-}x_A)$ $m = (-1+3)/(-1+2)$ *donc* $m = 2$ *et pour* $x = 0$ $y = 1$ *d’où* $f(x) : y = 2x + 1$ » (codé **aff ou alg**) |
| Question 2 (les extrema à partir d’un tvl) | *« à mon avis c’est -7 car sur la courbe la plus petite valeur est -7 »* *« à mon avis c’est 41 car sur la courbe la plus grande valeur connue est 41 »* (codé **2/graph**) |
| Question 3 (Tvl dans un contexte de la bourse) | « *oui entre février et mars A2 devient supérieur à A1 donc au moins 1 fois les cours de ces deux actions ont été identiques. Mais il se peut que entre deux valeurs une des actions ait grimpé ou chuté très fortement pour revenir à la normale à la fin du mois. Il y a donc eu au minimum une fois un moment où les actions ont été identiques* » en traçant une courbe lisse (codé **2+graph**) |
| Question 4 (Tvr $\rightarrow$ G) | a) courbe lisse correcte (codé **1**) |
| | b) « *on pourrait en tracer plein d’autres car entre deux valeurs la courbe peut prendre plein de directions différentes* » et il trace ainsi une autre courbe sans respecter le sens de variation indiqué par le tableau de variations. (codé **errsens**) |

Remarquons que cet élève n’arrive pas à donner un autre tableau de variations pour la question 1Ab, puisqu’il imagine ce tableau de valeurs correspondant à une fonction affine et il tente ainsi de trouver l’équation de la fonction (un des rares élèves qui l’a trouvé). Alors que pour la question 4Ab, il arrive à tracer une autre représentation graphique (une courbe libre) à partir d’un tableau de variations sans respecter le sens de variation. Il utilise ainsi le tableau de variations comme un tableau de valeurs et les flèches n’ont pas encore du sens pour lui.

Quant aux réponses pour les questions 2 et 3, il passe d’abord par une représentation graphique dans les deux cas. Remarquons pour la question 3, que le contexte dans lequel le tableau de valeurs est donné a l’influence sur la résolution, ce qui n’est pas le cas pour la plupart des élèves.

| E112 | |
|---|---|
| Question 1 (Tvl $\rightarrow$ Tvr) | a) Il donne un tableau de variations correct (codé **1**) |
| | b) « *non, on ne pouvait pas en trouver d'autre car pour cette fonction (étudiée sur l'intervalle [-2 ; 2]) ; il n'existe qu'une seule possibilité de sens de variation ; on le connaît grâce aux valeurs du tableau* » (codé **unictvr**) |
| Question 2 (les extrema à partir d'un tvl) | *« La plus petite valeur (=minimum) prise par g sur l'intervalle [-2 ; 14] doit être -7, car elle est la seule valeur négative mentionnée, et si elle n'était pas mentionnée le tableau serait faux et par conséquence la représentation graphique aussi»*<br>«*La plus grande valeur prise par g sur l'intervalle [-2 ; 14] est 41, car c'est le nombre le plus important et s'il n'était pas mentionné cela fausserait le graphique et la résolution* » (codé **2/graph ?**) |
| Question 3 (Tvl dans un contexte de la bourse) | « *oui, cela aurait pu être possible. Mais ce n'est pas le cas pour cet exemple précis. A aucun moment et à aucun mois les deux actions A1 et A2 ont eu le même cours. Par contre, l'action A2 a eu, au mois de mars et de mai, les mêmes cours (=11,78€)*» (codé **nonchiff**) |
| Question 4 (Tvr $\rightarrow$ G) | a) il a tracé une courbe lisse (codé **1**) |
| | b) « *oui, on pourrait en tracer une autre, plus détaillés ; mais les points nommés dans le tableau, et donc présents sur la représentation graphique, seraient bien sûr à la même place pour ne pas changer les données de la courbe* »<br>(codé **?**) |

Cet élève n'arrive pas à donner un autre tableau de variations pour la question 1Ab et une autre représentation graphique pour la question 4Ab comme la plupart de ces camarades. Son argument n'est pas lié aux connaissances sur le tableau de valeurs ou sur le tableau de variations mais plutôt à l'unicité d'un tableau de variations ou d'une représentation graphique. Il argumente à partir des réponses qu'il a données pour 1Aa et 4Aa mais pas à partir du tableau de valeurs ou du tableau de variations qui sont des registres d'entrée dans la question.

Pour la question 2, il donne des idées sur le contrat de l'utilisation du tableau de valeurs. Il précise que le tableau de valeurs comporte les valeurs remarquables d'une fonction. Alors que pour la question 3, il n'utilise ni le contexte de la bourse ni la notion de fonction. Il ne compare que des valeurs du tableau.

***Questionnaire B***

| E87 | |
|---|---|
| Question 1<br>(Tvl $\rightarrow$ G) | a) Il a tracé une courbe qui ne présente pas une droite en changeant le sens de variation entre les points du tableau (codé **1**) |
| | b) « *oui, on pourrait en tracer une autre. Il suffit qu'elle passe par les points indiqués dans le tableau (elle peut être plus droite, ...)* » sans tracer une autre (codé **?**) |
| Question 2<br>(les extrema à partir d'un tvl) | *« on ne peut pas savoir, ça peut être une valeur très élevé comme 20 ou même plus car la courbe peut tout à fait être montée très haut entre deux points puis redescendu. Mais dans la plupart des cas, la logique serait de dire 10 ou aux alentours »*<br>*« Idem que pour la plus grande. Cette valeur peut être très petite car la courbe peut tout à fait descendre entre deux points. Mais la logique dirait -5 ou aux alentours »* (codé **2/graph**) |
| Question 3<br>(Tvl dans un contexte de la bourse) | « *oui, c'est tout à fait possible. Un nombre de fois (illimité). Tout au long des mois, il est possible que les actions montent ou descendent plusieurs fois même. De telle sorte qu'elle se retrouve à la même valeur.Ainsi, il est possible que l'action A2 soit descendue vers mi-janvier à 7,5 que le cours des deux actions aient été identiques et que A2 soit remonté à 10,4 pour le premier février. De même, A1 a elle tout à fait pu augmenter le mois suivant et redescendre à 6,5 pour le 1^er^ mars* » (codé …) |
| Question 4<br>(Tvr $\rightarrow$ Tvl) | a) il a donné un tableau de valeurs complet (codé **1/complet**) |
| | b) « ????? »<br>(codé 1) |

Un de rares élèves qui donne la réponse exacte pour toutes les questions. Il commence dès le début à tracer une courbe « libre », mais pas une droite pour la question 1Ba. Ceci montre qu'il a bien conscience du fait qu'entre deux valeurs successives du tableau la fonction peut changer du sens.

Nous constatons pour la question 2, qu'il y a des éléments du contrat sur l'utilisation du tableau de valeurs ou bien sur les fonctions qu'on étudie jusqu'à là. En effet, le tableau de valeurs comporte en général les valeurs particuliers de la fonction (ou approximativement).

Pour la question 4Ba, il donne un tableau de valeur complet avec toutes les valeurs entières. Alors que pour la question 4Bb, il explique bien qu'on peut choisir n'importe quelle valeur en respectant les contraintes du tableau de variations.

<table>
<tr><th colspan="2">E108</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Question 1<br>(Tvl $\rightarrow$ G)</td><td>a) Il a tracé une courbe représentant une droite (codé 1)</td></tr>
<tr><td>b) « on ne pourrait pas en tracer une autre il n'existe qu'une seule droite, unique passant par deux points or ici les cinq points sont alignés donc il n'existe qu'une seule droite passant par ces points et étant la représentation graphique de g» (codé ?)</td></tr>
<tr><td>Question 2<br>(les extrema à partir d'un tvl)</td><td>« La plus grande valeur prise par g sur l'intervalle [-4 ; 4] est l'ordonnée du point de coordonnées (4 ; 9) car g passe par le point de coordonnés (4 ; 9) d'après le tableau de valeurs. La plus grande valeur est 9 »<br>« La plus petite valeur prise par g sur l'intervalle [-4 ; 4] est l'ordonnée du point de coordonnées (0 ; -2) car g passe par le point de coordonnés (0 ; -2) d'après le tableau de valeurs. La plus petite valeur est -2 » (codé 2/ graph)</td></tr>
<tr><td>Question 3<br>(Tvl dans un contexte de la bourse)</td><td>« Il est possible que entre le mois de mars et celui d'avril les cours de ces deux actions aient été identiques. Etant donné que les cours de ces deux actions entre le mois de mars et le mois d'avril soient croissant pour l'action A1 et décroissant pour l'action A2 alors il se peut que leurs cours aient été identiques. Alors leurs cours auraient été entre 7,5 et 8,1» (codé 2/sens)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Question 4<br>(Tvr $\rightarrow$ Tvl)</td><td>a) il a donné un tableau de valeurs « simple » (codé 1)</td></tr>
<tr><td>b) « on pourrait en donner un autre si on connaissait l'équation de la fonction h(x). Or comme la représentation graphique de h est une courbe (car d'après le tableau de variations elle décroît puis croît enfin décroît sur [-3 ; 3]) alors il est impossible de déterminer h(x) en fonction de x. Or si on avait h(x) en fonction de x on pourrait connaître les valeurs pour -1, -1,5, -0,5, -0,7, 0,5,… et ainsi faire un autre tableau de valeurs possible pour h.<br>Ou si on ne connaît pas h(x) en fonction de x on peut tracer la représentation graphique de h(x) puis relever par lecture graphique les valeurs possibles de h mais ce serait pas précis » et il trace une courbe lisse et donne un tableau de valeurs<br>(codé alg/graph)</td></tr>
</table>

Cet élève n'arrive par à tracer une autre représentation graphique pour la question 1Bb, puisqu'il trace la droite à la question 1Ba et ainsi il se bloque par le modèle affine qui renforce donc l'idée qu'il n'y a qu'une seule représentation graphique.

Pour les questions 2B et 3B, il utilise soit le registre graphique soit le changement du sens des valeurs et répond ainsi dans les limites des valeurs données par les tableaux de valeurs sans utiliser les connaissances sur un tableau de valeurs ni le contexte de la bourse.

Nous avons choisi cet élève pour sa réponse à la question 4Bb où nous pensons qu'il a bien expliqué le contrat lié à la notion d'image et d'antécédent. En effet, nous avons constaté que un nombre important d'élèves arrive à tracer une autre représentation graphique (à partir d'un tableau de valeurs ou d'un tableau de variations) aux questions 1Bb et 4Ab, alors que la plupart d'entre eux n'arrive pas à donner un autre tableau aux questions 1Ab ou 4Bb. Ici, nous constatons que « trouver l'image d'une valeurs » peut se faire seulement soit à partir du registre algébrique ou soit à partir du registre graphique. « Inventer l'image d'une valeur » n'est pas compatible au rapport personnel des élèves.

Ceci nous montre que la plupart des élèves font certains conversions (par exemple d'un tableau de valeurs à une représentation graphique) sans utiliser le sens de concept de la fonction qui doit guider normalement. Ils les font automatiquement… Ils se trouvent donc plutôt dans le registre « dessin »…

**Interview des élèves**

Dans une des classes où nous avons fait passer notre questionnaire, nous avons eu l'occasion d'interviewé tout de suite après le passage du questionnaire deux élèves (ayant répondu l'un au questionnaire A l'autre au B). Il s'agit bien sûr d'un seul binôme et donc d'un cas particulier, mais la teneur de cette entrevue nous a semblé suffisant riche pour que nous en faisions état dans notre travail.

Dans notre entretien, nous avons fait discuter les élèves sur les deux questionnaires. Pour faciliter notre analyse, nous nommerons ces deux élèves E1 et E2.

Voici leur réponse individuelle :

| **E1 (Questionnaire B)** | | **E2 (Questionnaire A)** | |
|---|---|---|---|
| Q1 | a. Elle trace une courbe mais avec une erreur de placement du point donc pas une droite. (**errgraph**)<br>b. « oui on fait sa symétrie pas rapport à l'axe des ordonnées » sans tracer une autre | Q1 | a. il donne un tableau de valeurs « correct » (**1**)<br>b. « oui il y en a un autre » et il donne le même tableau mais avec les valeurs non pertinentes ! (**nonpert**) |
| Q2 | « Le maximum est 9 (et minimum -2) : c'est la plus grande (ou petite) du tableau » et tracer une courbe lisse (**2/graphe**) | Q2 | « on ne peut pas la déterminer. Car si on essaye de faire la courbe selon ce tableau, on en fera plusieurs vu qu'une infinité de possibilités est possible. On aura donc plusieurs valeurs minimales (toutes différentes) » (**1/graph**) |
| Q3 | Sans réponse | | « Le cours des actions a pu être identiques au moins une fois. On ne peut pas déterminer le nombre de fois. Car le tableau n'est pas assez précis). Selon ce tableau les actions ont pu être identiques au mois de février mais cela a pu se produire d'autres fois » (**2+**) |
| Q4 | Sans réponse | | a. Il trace une courbe qui ne respecte pas le sens de variation ni l'intervalle de définition (**errsens**)<br>b. « il y a une infinité de possibilités » et il trace une autre courbe qui ne respecte pas non plus au sens de variation ni l'intervalle de définition.<br>(**errsens**) |

La discussion a d'abord porté sur le questionnaire B. Voici un extrait de leur discussion sur la question 1Bb :

1. E1 : Tu aurais mis « oui », toi ? *(les élèves avaient leurs réponses sous les yeux)*
2. E2 : Ben oui on peut tracer une autre.
3. E1 : Pourquoi ?
4. E2 : Parce que avec ça tu peux faire une infinité que tu peux tracer !
5. **E1 : Mais moi je n'en ai que x …**
6. E2 : Mais non, tu n'as que ces valeurs, mais tu n'as pas toutes les valeurs *(puis il lui montre ce qu'il a fait pour 4Aa et 4Ab : il trace deux représentations graphiques à partir du tableau du variations donné, mais sans respecter le sens de variation indiqué dans les deux ca*s). Regarde ! Tu vois tu peux tracer n'importe comment en effet ! Tu place les points du tableau puis tu peux faire n'importe quoi.
7. **E1 : Ah oui oui mais ce sera pas la même forme en effet !**
8. E2 : Non ce sera une autre forme.

Remarquons que E2 a bien conscience qu'entre deux valeurs du tableau la fonction peut changer du sens, alors que E1 a tendance à donner une seule courbe qui est la réponse la plus simple.

Pour la question 2, E1 utilise le registre graphique et donne une réponse en restant dans les limites des valeurs du tableau, alors que E2 dit qu'on ne peut pas savoir en utilisant un contre-exemple à partir du registre graphique :

13. E2 : Moi, j'ai mis « on ne peut pas savoir ».
14. **E1 : Ben si ! Si tu fais le graphique regarde j'ai fait le graphique** (elle lui montre le graphique (lisse) qu'elle a déjà tracé à partir de ce tableau de valeurs !)
15. E2 : Oui mais avec ton graphique, entre ce point et ce point (*il lui monte deux points sur le graphique*) ça peut faire n'importe comment, c'est une figure bizarre.
16. **E1 : Mais par rapport juste à ce tableau là !**
17. E2 : Oui mais tu vois par exemple –3.5 la fonction peut prendre une valeur plus grande.
18. **E1 : Oui mais c'est un travail simple sur x !**
19. E2 : Oui mais tu l'as raccourci, ça peut faire comme ça *(il lui explique sur papier que la fonction peut monter ou descendre entre deux valeurs du tableau*).
20. E1 : Ah oui entre –4 et –3 et –3 et –2,…
21. E2 : Tu voix tu trouves que ça fait comme ça mais ça peut faire comme ça aussi (il montre que la fonction peut prendre une valeur plus grande que 9 !).
22. **E1 : Moi je crois que par rapport au tableau… et l'intervalle est donné c'est [-4 ; 4].**
23. E2 : Oui mais tu vois ça peut être 24 par exemple ça peut être ça.
24. E1 : Moi j'ai mis la dernière valeur.
25. E2 : On ne peut pas savoir.

On voit bien que E1 n'est pas convaincu par les explications de E2 sur la question 1B et continue à dire qu'on peut tracer un seul graphique à partir d'un tableau de valeurs et ainsi déterminer les extrema de la fonction.

Pour la question 3, E2 utilise le croissement de deux valeurs (2/sens) et ajoute que le cours de deux actions peut changer à n'importe quel moment et ainsi elles peuvent être identiques à d'autres moments. E1 tombe d'accord sur ce que E2 dit, sans faire de commentaire. Nous lui demandons alors pourquoi elle ne l'a pas répondu. Elle nous dit alors que cette question n'était pas claire pour elle.

Pour la question 4A, ils se sont tout de suite mis d'accord sur le fait qu'on peut tracer une autre représentation graphique à partir d'un tableau de variations. Ainsi, ils considèrent qu'il y a une similitude entre la question 1B et 4A, puisqu'il s'agit toujours de tracer des courbes à partir de tableaux.

Alors que leur réaction face à la question 4Ab est différente. Tous les deux disent au départ qu'on ne peut pas donner un autre tableau de valeurs puisqu'on ne connaît pas la fonction et qu'on ne peut pas calculer d'autres valeurs. Pourtant, E2 avait bien insisté sur le fait qu'entre deux valeurs du tableau, la fonction peut changer de sens pour les trois premières questions.

Voici un extrait de leur interaction sur la question 4Ab:

42. E1 : Est-ce qu'on pourrait en donner un autre ?
43. E2 : (…) avec ça non.
44. E1 : Non ?
45. E2 : Moi je mettrais non, tu connais pas d'autre valeur en effet. Chaque fois, il y a une seule valeur tu pourrais donner qu'une seule valeur avec ça.
46. E1 : S'il n'y a pas de fonction non on ne peut pas calculer d'autre valeur. Moi, je mettrais aussi non.
47. Ch : Pourquoi ?
48. E1 : Ben on a l'intervalle [-3 ; 3] et on n'a que ça.
49. E2 : On ne connaît que ces valeurs là donc avec ça on peut faire un seul tableau et voilà.
50. Ch : Mais par exemple pour la question 1B vous avez dit qu'on peut tracer plusieurs représentations graphiques et vous avez également dit pour la question 2 qu'on peut tracer plusieurs courbes à partir du tableau de valeurs !
51. **E2 : Oui mais le problème c'est qu'on pourrait pas donner la valeur exacte. Il y a une infinité de possibilité mais on ne pourrait pas donner la valeur exacte. On pourrait donner une autre pour 1Bb mais au hasard**
52. Ch : Pourquoi pas alors donner ici un autre tableau de valeurs au hasard ?
53. E2 : Ah oui je me suis trompé, on peut en faire mais en mettant les valeurs au hasard.
54. Ch : On trace aussi le deuxième graphique au hasard pour la question 1Bb ou pour la question 4Ab, non ?
55. E2 : Oui oui je me suis trompé.
56. E1 : Ici, si tu en donnais un autre, tu mettrais quoi comme valeur au hasard ?
57. E2 : Tu peux mettre une valeur pour –3,5 tu mets 6 par exemple.
58. Ch : Par exemple pour x égal à -1, vous pouvez donner quelles valeurs pour la fonction ?
59. E2 : On peut donner toutes : 8, -4 etc.
60. Ch : On peut donner par exemple -2 ?
61. E2 : Ah oui on peut donner toutes les valeurs comprises entre 4 et 0
62. E1 : Ah oui on peut donner aussi par exemple pour 2, les valeurs comprises entre 2 et –1.

# ANNEXES C

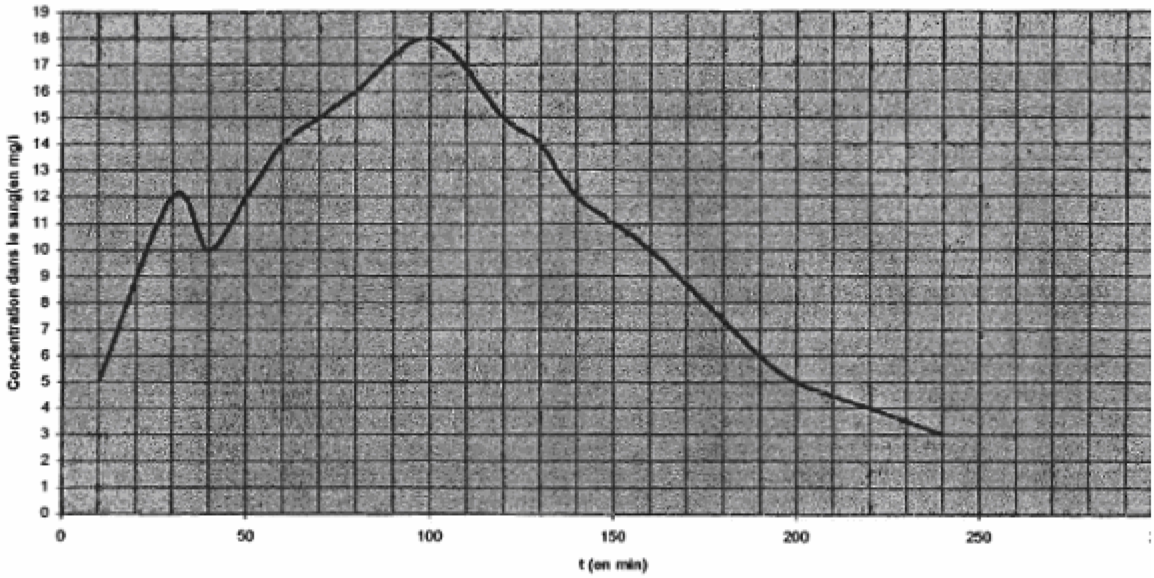
## Ingénierie didactique

## Première séance

Voici ce que le professeur a proposé comme activité au début de cette séance :

**2°2- Novembre 2003 – Fonctions : Généralités .**

Le paracétamol est un produit qui permet de combattre la douleur et la fièvre. Il se présente sous forme de gélules . Son action est proportionnelle à son taux de concentration dans le sang.
La courbe ci-dessous donne la concentration dans le sang ( exprimée en milligrammes par litre) en fonction du temps écoulé ( exprimé en minutes) depuis la prise du médicament.
Les mesures commencent 10 minutes après l'absorption de la gélule et s'arrêtent au bout de 4 heures.




Utiliser le graphique pour répondre aux questions suivantes :

**1.** Quelle est la concentration dans le sang au bout de 50 minutes ? au bout de 2 heures ? et au bout de 2 h 40 ?

**2.** A quel instants a-t-on une concentration de 15 mg/l ? de 4 mg/l ? et de 10 mg/l ?

**3.** A combien d'instants correspondent une concentration de 11 mg/l ?

**4.** A partir de quel instant a-t-on une concentration supérieure à 14 mg/l et jusqu'à quand ?

**5.** Compléter le tableau suivant :

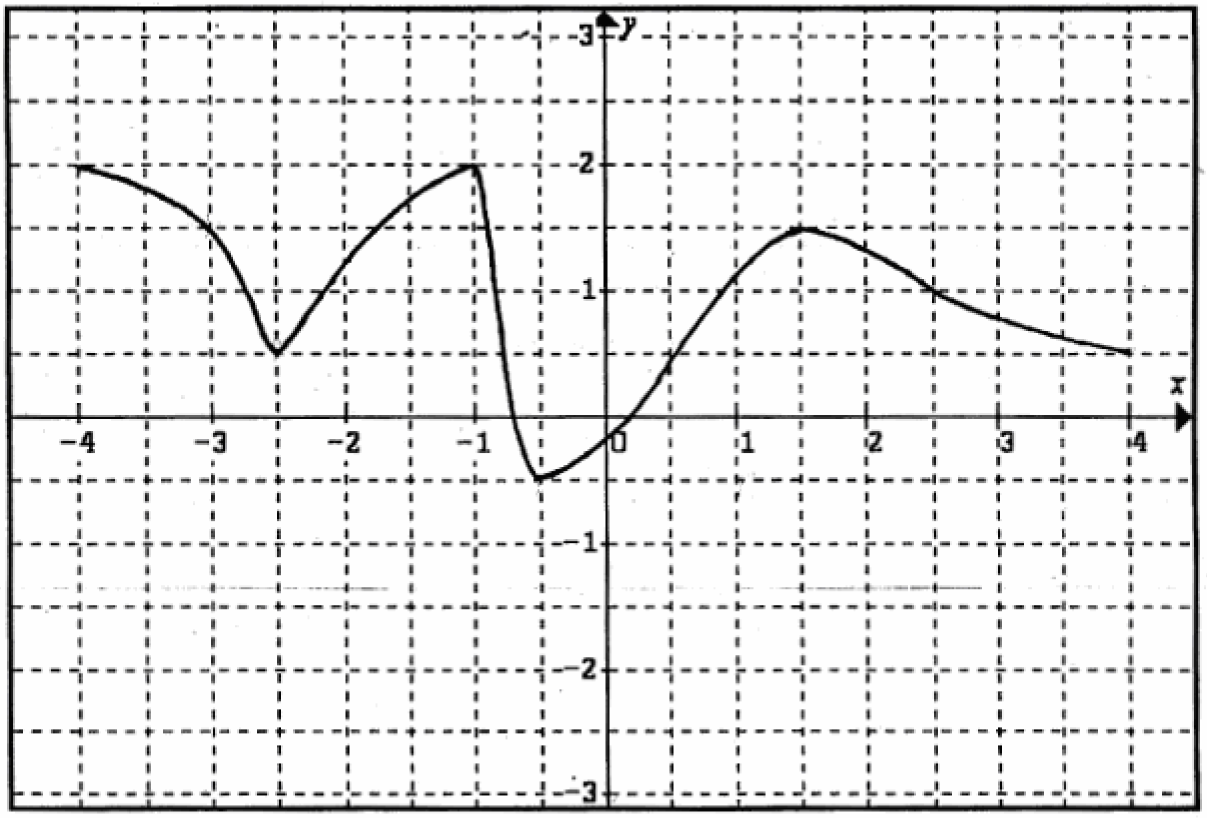
| t | 10 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 100 | 120 | 130 | 140 | 160 | 190 | 200 | 220 | 240 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| concentration | | | | | | | | | | | | | | | | |

# Deuxième séance

*Activité 1*

**Activité 1**

Vous devez donner, sur un seul transparent, des informations (tout sauf une courbe) sur la courbe ci-dessous, de sorte que vos camarades tracent une courbe qui ressemble le plus possible à cette courbe.



## *Les productions des six groupes d'élèves (Activité 1)*

**1er groupe :**

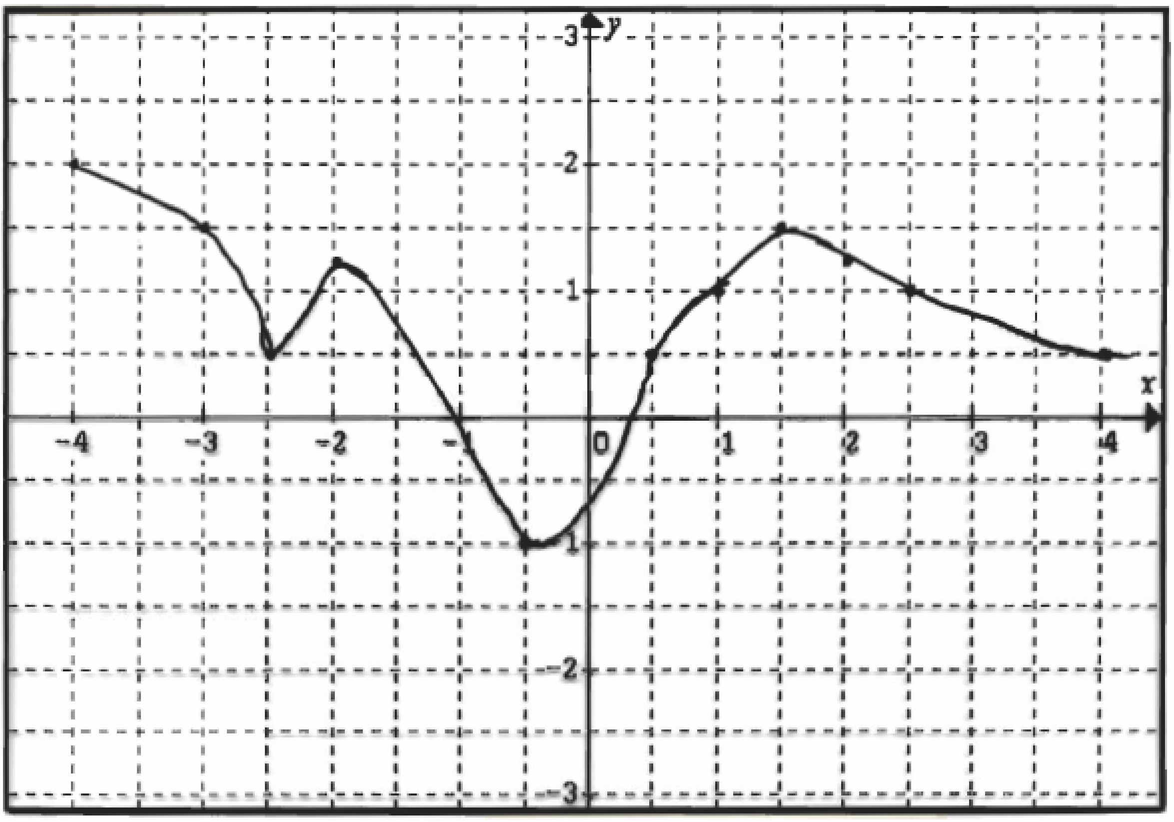
Groupe émetteur :

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | -4 | -3 | -2,5 | -2 | -1 | -0,5 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 4 | / |
| y | 2 | 1,5 | 0,5 | 1,25 | 2 | -1 | 0,5 | 1 | 1,5 | 1,25 | 1 | 0,5 | / |

placer ces points dans un repère O(I ; J) orthogonale pour obtenir une courbe.

l'échelle 0,5 0,5

Groupe récepteur



**2ème groupe :**

*Groupe émetteur :*

tracer 2 axe perpendiculaires avec x comme abscisse et Y en ordonnée avec les informations suivantes :

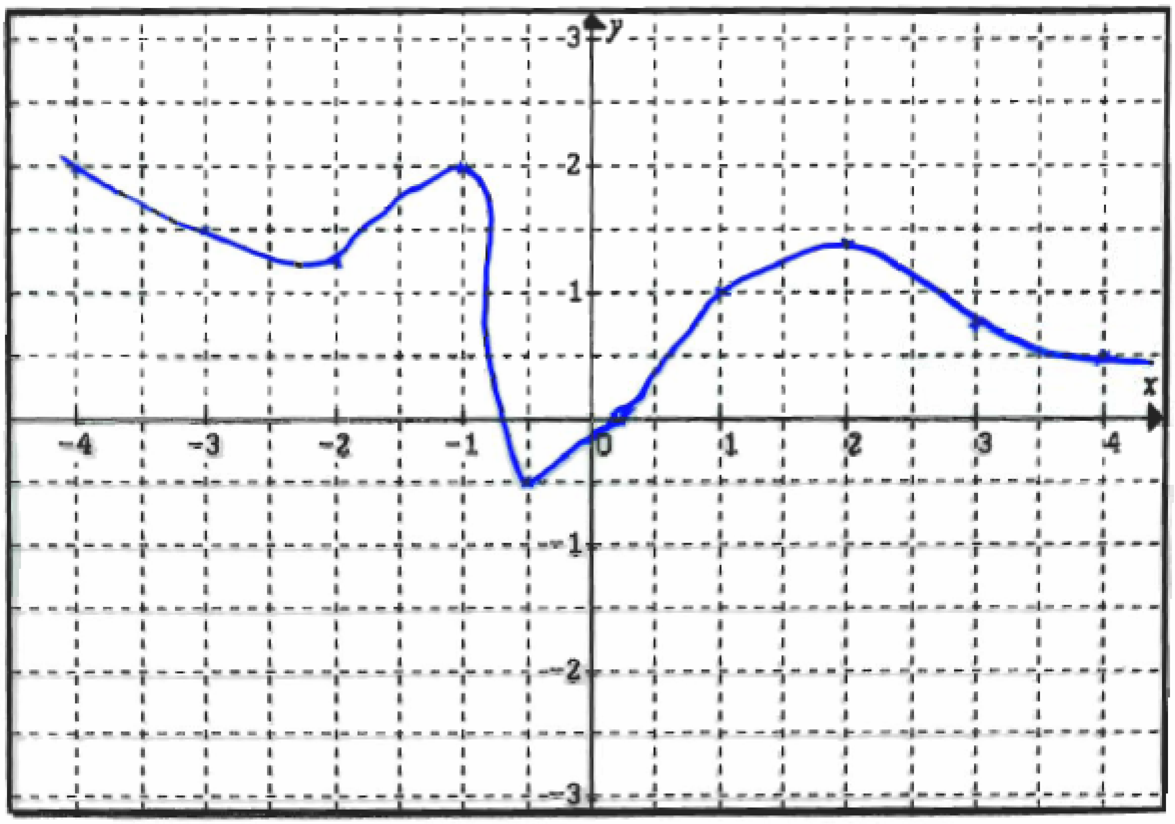
uadam
ié
arret
aire

⊢——⊣ = 1x ou 1y
1cm

| x | -4 | -3 | -2 | -1 | -0,5 | 0,25 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 2 | 1,5 | 1,25 | 2 | -0,5 | 0 | 1 | 1,40 | 0,75 |

| x | 4 |
|---|---|
| y | 0,5 |

*Groupe récepteur :*



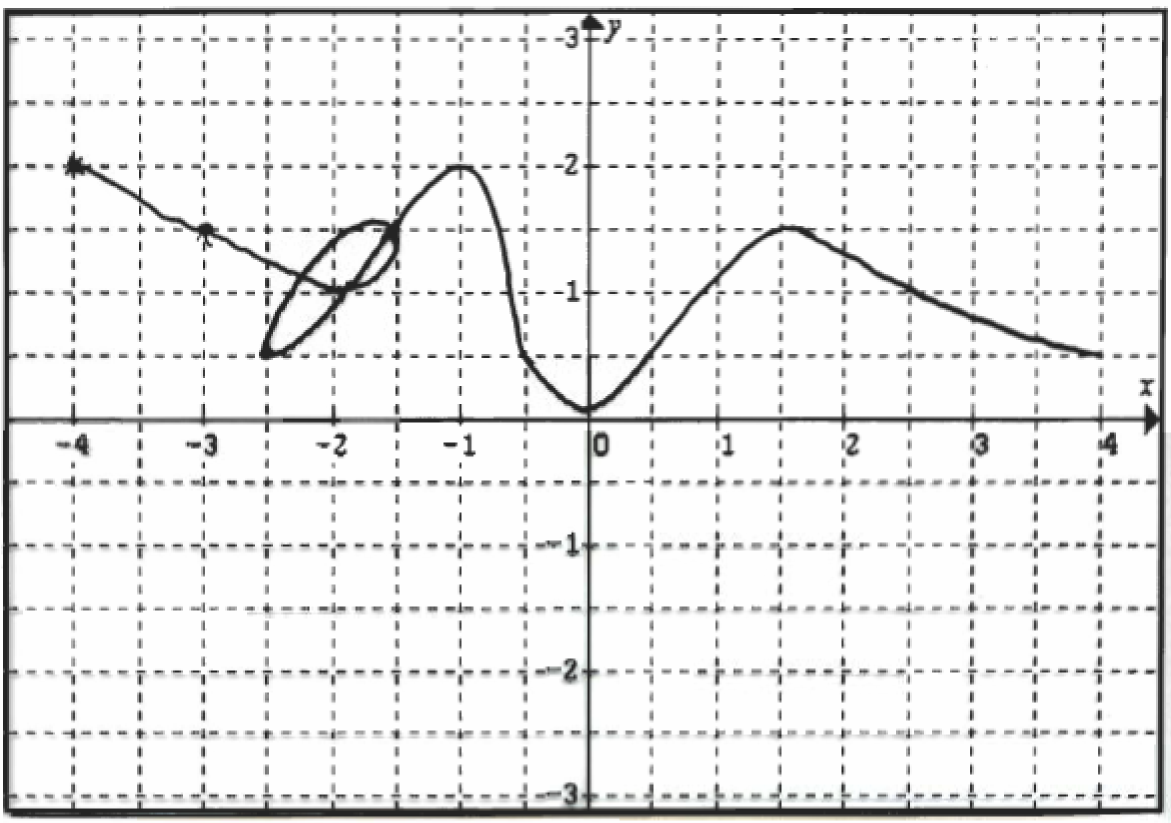
**3ème groupe :**

*<u>Groupe émetteur :</u>*

Mignard
Guillaume

t une courbe avec les points :
+; 2)
3 ; 1,5)
ssez entre (-2 ;1) et (-2 ; 1,5)
2,5 ; 0,5)
1 ; 2)
,5 ; -0,5)
,5 ; 0,5)
1,5 ; 1,5)
2,5 ; 1)
4 ; 0,5)
racez cette courbe à la main sans faire de droite.

*<u>Groupe récepteur :</u>*

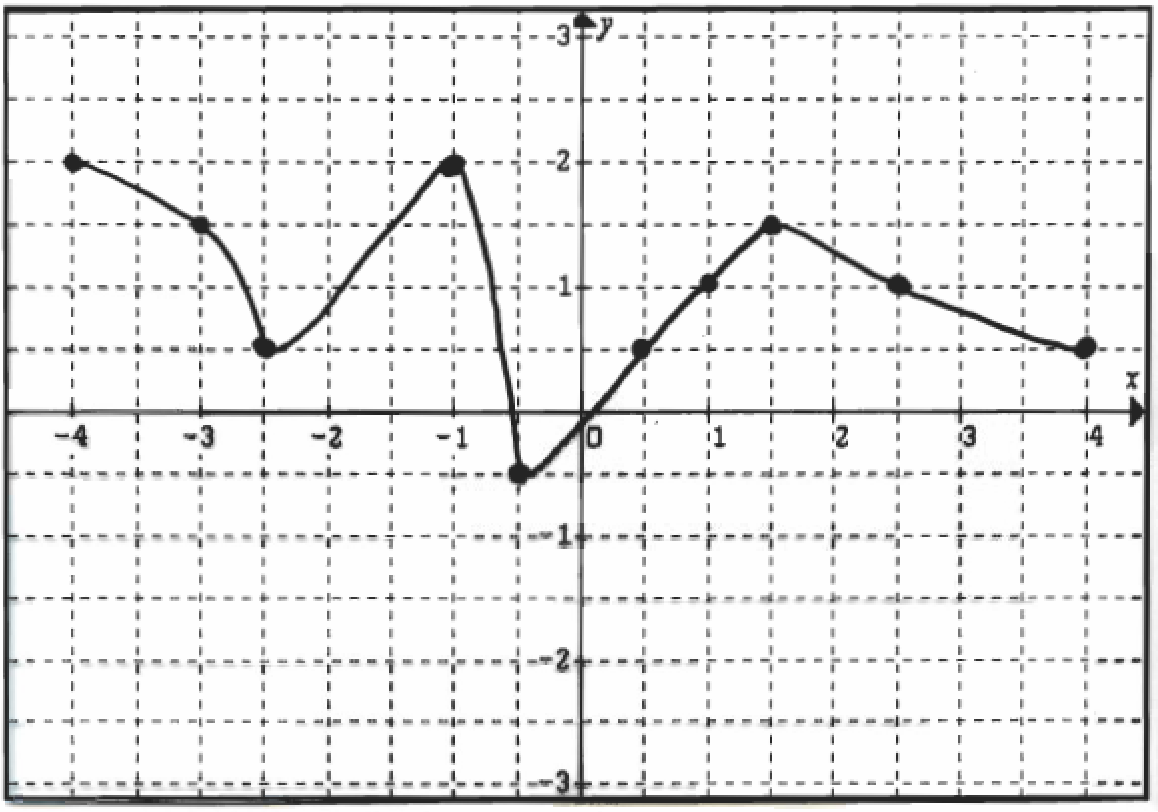


**4ème groupe :**

*Groupe émetteur :*

Tout d'abord, le résultat final devra ressembler à une courbe non régulière.
Le repère a pour abscisse x et pour ordonnée y.
Placer un premier points [-4 ; 2] ; un autre points [-3 ; 1,5] ;
un points [-2,5 ; 0,5] ; un points [-1 ; 2] ; ensuite un
points [-0,5 ; -0,5] ; un points [0,5 ; 0,5] ; un point [1 ; 1],
et [1,5 ; 1,5], ensuite [2,5-1], puis le points final
[4 ; 0,5]

*Groupe récepteur :*



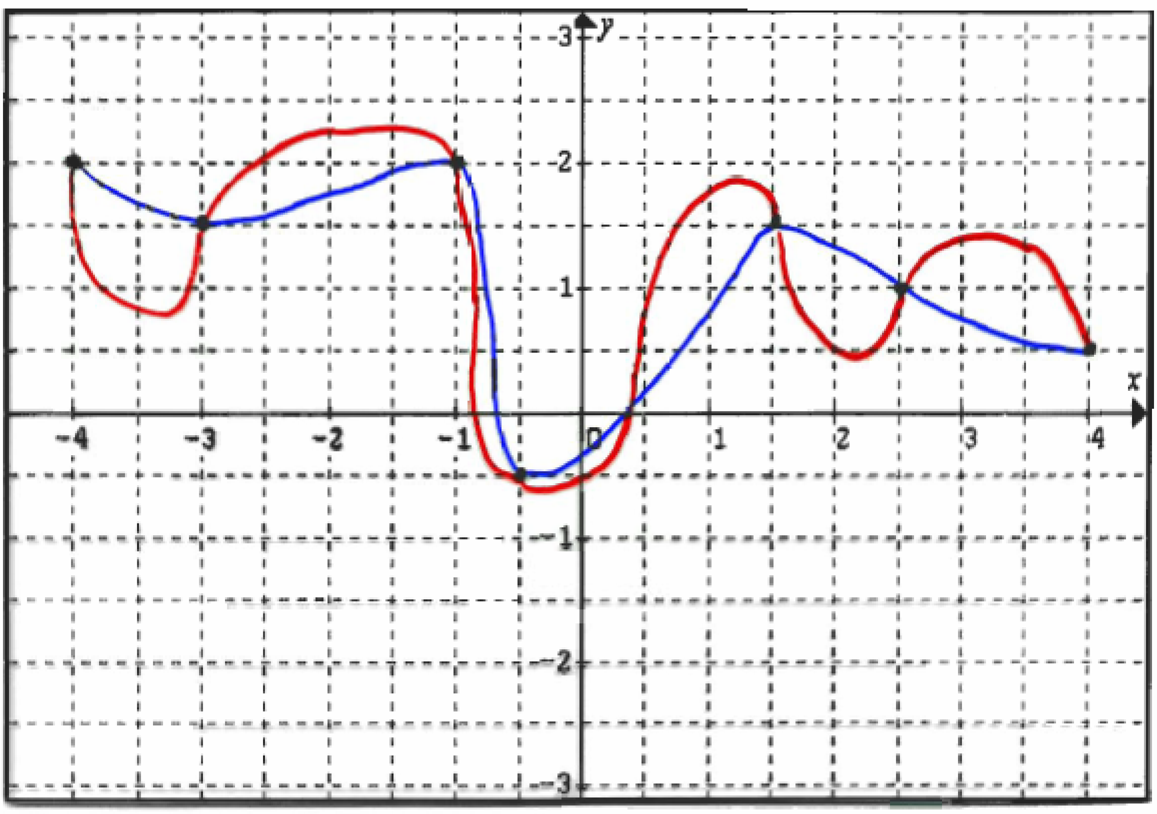
**5ème groupe :**

*<u>Groupe émetteur :</u>*

Tracer la courbe d'après le tableau en utilisant un repère perpendiculaire dont IO = OJ = 1 .(O.R.N).

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | -4 | -3 | -1 | -0,5 | 1,5 | 2,5 | 4 |
| y | 2 | 1,5 | 2 | -0,5 | 1,5 | 1 | 0,5 |

*<u>Groupe récepteur :</u>*



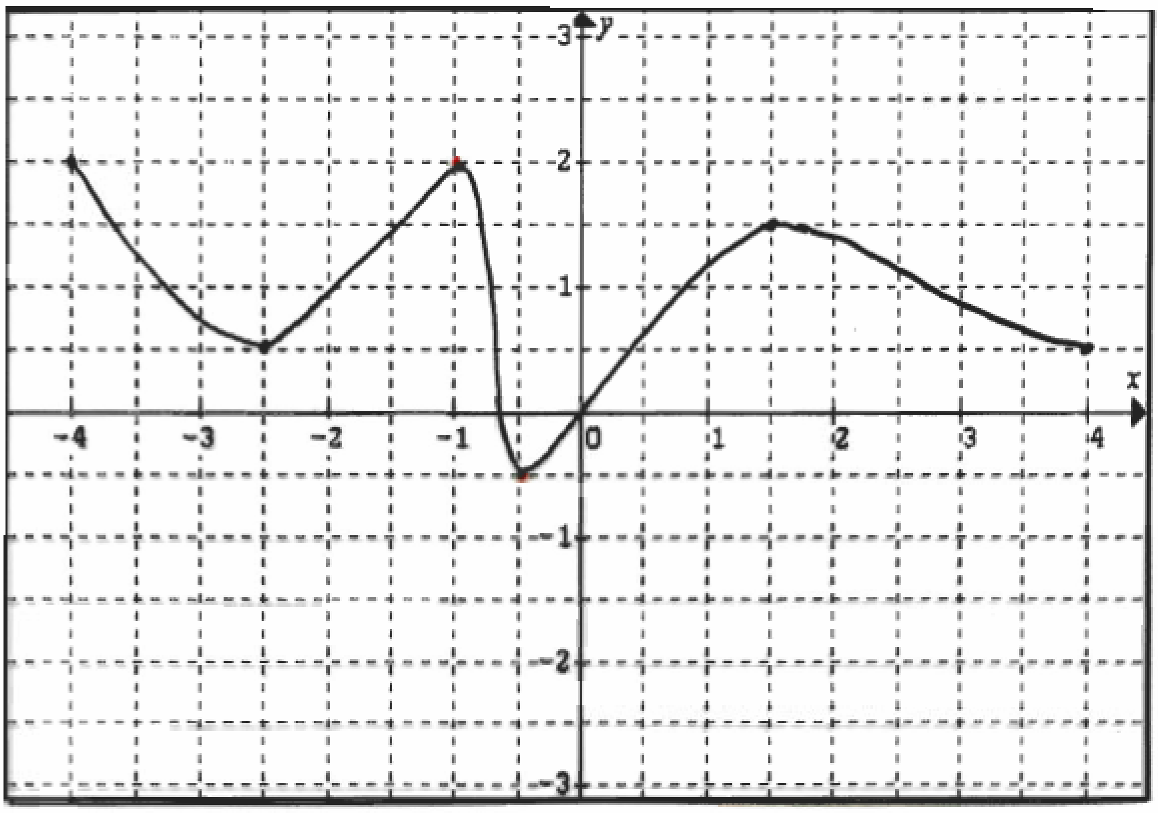
**6ème groupe :**

*Groupe émetteur :*

La courbe est [-4 ; 4].

| x | -4 | -2,5 | -1 | -0,5 | 1,5 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 2 | 0,5 | 2 | -0,5 | 1,5 | 0,5 |

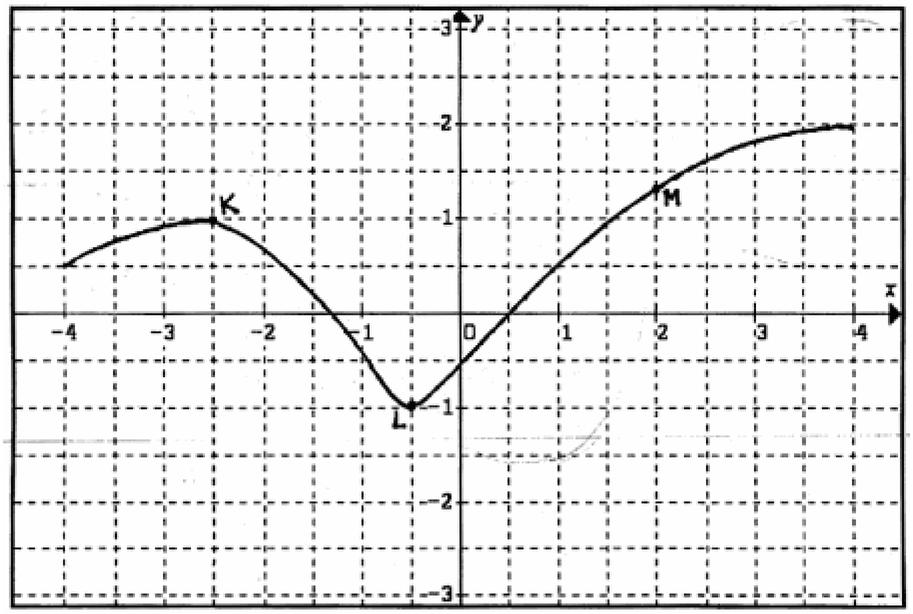
*Groupe récepteur :*



*Activité 1bis*

**Activité 1 bis**

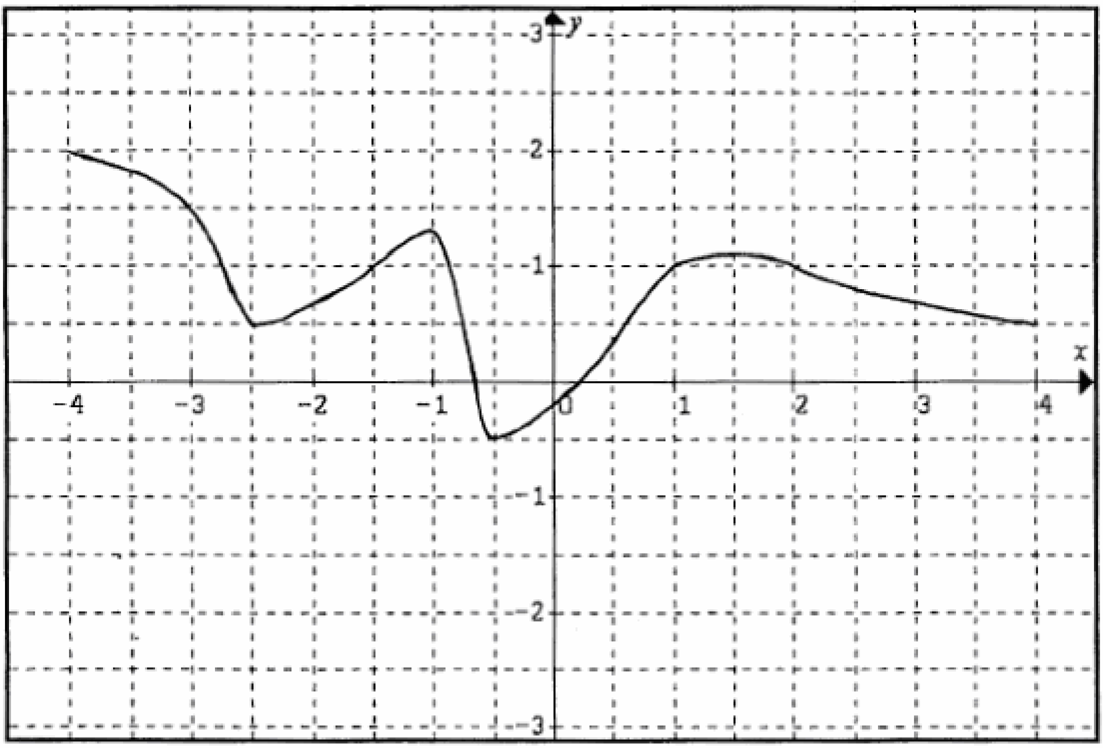
Voici la courbe d'une fonction qui est définie sur l'intervalle [-3 ; 3]. Tracez des courbes toutes différentes sur le même intervalle, qui passent chaque fois par les points K, L et M.



*Deuxième version de l'activité 1*

**Activité 1**

On a donné à un autre élève de Seconde ce quadrillage sans la courbe. Vous devez lui fournir des informations (tout ce que vous voulez sauf une courbe) pour qu'il puisse reproduire cette courbe le plus fidèlement possible.



## *Transcription de l'activité 1*

## A. Groupes Emetteurs

### *1) I. Groupe : binôme d'élèves (E1 et E2)*

Voici leur message final :

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | -4 | -3 | -2.5 | -2 | -1 | -0.5 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 4 |
| y | 2 | 1.5 | 0.5 | 1.25 | 2 | -1 | 0.5 | 1 | 1.5 | 1.25 | 1 | 0.5 |

*Placer ces points dans un repère O(I ; J) orthogonale pour obtenir une courbe l'échelle …*

1. P: Chacun de groupe il va recevoir une figure sur laquelle c'est dessiné une courbe. Ces trois groupes qui ont la figure vont devoir rédiger un texte qui euh … donne des informations sur la courbe qu'ils ont reçue hé, de sorte que en se mettant ce texte aux autres groupes eh bien ceux-ci soient capables de refaire la courbe.
2. E1 : A la vache !
3. P : Alors de point de vue pratique vous allez pouvoir faire des essaies le texte au brouillon, quand vous serez mis d'accord sur un texte, eh bien vous écrivez le texte sur le transparent. Pendant ce temps là les autres trois groupes font une autre activité que je vais distribuer.
4. E1 : En combien de temps Monsieur ?
5. P : Une dixième de minute hé à partir de maintenant
6. E1 : Ah putain !
7. E2 : On écrit où ?
8. E1 : Monsieur ? Monsieur ? Monsieur ?
9. E2 : il faut noter par exemple là il faut écrire sur une feuille parce que tu vois là comme ça l'autre il faut dessiner la courbe
10. E1 : Monsieur ? On redessine la courbe ?
11. E2 : Ben non par exemple
12. P : Non tu as le texte que tu lis !

E1 et E2 ils commencent à lire l'énoncé de l'activité ! E1 répète en insistant « tous sauf une courbe »

13. E1 : C'est facile on fait un tableau
14. E2 : Non on fait pas on fait …
15. E1 : Toutes les informations on fait un tableau, du coup !
16. E2 : Mais déjà elle part à gauche -4 à 2
17. E1 : T'inquiète, t'inquiète ! (il commence à construire un tableau sur le brouillon)
18. E2 : Non !
19. E1 : Monsieur ? On peut faire un tableau ?
20. E2 : Faire un tableau ouais ! (Il répète pour lui-même)
21. P : Tu as déjà entendu tu peut faire ce que tu veux sauf une courbe !
22. E1 : Ça nous fait… (il continue à construire le tableau)
23. E2 : Tu vas faire quoi ?
24. E1 : On fait un tableau
25. E2 : D'accord mais tu vas écrire quoi ?
26. E1 : Les valeurs de x, hé ?
27. E2 : U là !
28. E1 : Les valeurs de x et les valeurs de y
29. E2 : Moi je pense que… (il a l'aire de ne pas être d'accord !)
30. E1 : Ça c'est facile ça après… T'es d'accord ou pas ?
31. E2 : Ben moi j'ai pas envie de faire comme ça en fait !
32. E1 : Tu veux faire quoi, toi ?

33. E2 : Je veux faire par exemple la courbe elle arrive elle apparaît déjà -4 et 2 (il montre ce point sur la courbe))
34. E1 : Mais attend ! C'est trop facile quant on fait un tableau. On fait les points et après on les relie (il montre aussi sur la courbe !)
35. E2 : Ah d'accord.
36. E1 : T'as compris ?
37. E2 : Ah oui oui.
38. E1 : Au lieu d'écrire le 4 il va au truc je mets un tableau tranquille !
39. E2 : Ok ! On verra ça va donner quoi!
40. E1 : Ça va donner rien du tout (rire) (il a fini la construction d'un tableau vide)
41. E1 : Ça nous fait -4
42. E2 : -4 (E1 écrit dans le tableau)
43. E1 : Ça va où le -4 ?
44. E2 : à 2… Ensuite après… -3 et 1.5 (E1 ajoute dans le tableau (-3 ; 1.5))
45. E1 : ensuite… -2…
46. E2 : Ensuite moins non non non ah
47. E1 : -2.5
48. E2 : Ah non non non attend
49. E1 : -2.5
50. E2 : Voilà -2.5 et 0.5
51. E1 : T'es sûr ?
52. E2 : Oui oui 0.5 (E1 ajoute dans le tableau (-2.5 ; 0.5))
53. E2 : Après on dit… non là c'est ici donc ça fait…
54. E1 : Non -2 ça nous fait combien, -2 ?
55. E2 : Non je pense que là ce tiré est à peu près droite (il parle la partie de la courbe sur [-2.5; -1]) Ouais bof j'ai pas !
56. E1 : Il faut plusieurs points pour… il faut au moins trois points pour relier…
57. E2 : Mais là ils sont difficiles à percer (il parle le point (-2 ; …)) alors celui là est beaucoup plus facile à percer ce point là (il parle le point (-1 ; 2))
58. E1 : C'est un milieu là
59. E2 : Non c'est pas un point ça ! (ils parlent des tirés du quadrillage)
60. E1 : 1.25
61. E2 : Ouais d'accord on sait pas trop si 1.25
62. E1 : On s'en fou ! Allez on mets 1.25 (Il ajoute dans le tableau (-2 ; 1.25))
63. E2 : Alors ensuite -1 et 2
64. E1 : T'es sûr ?
65. E2 : Oui oui (E1 écrit (-1 ; 2) dans le tableau)
66. E2 : Ensuite (-0.5 ; -1) (il a fait une erreur !!!)

Puis ils se mettent d'accord sur le point (0.5 ; 0.5)

67. E1 : Après y a quoi ?
68. E2 : Celui là (1 ; 1)
69. E1 : Y a… 0…
70. E2 : 1 et 1
71. E1 : Non c'est pas 1 celui là (il parle la valeur pour x=1)
72. E2 : 1 et 1
73. E1 : Non c'est pas totalement 1 celui là
74. E2 : Ouais mais à peu près il a dit le plus ressemblant. Il vaux mieux mettre directement ça parce que ça suit à peu prés la même droite (il parle la partie de la courbe sur [0.5 ; 1.5])
75. E2 : Donc on est où là…1.5 et 1.5
76. E1 : Non on fait avant… on fait
77. E2 : Je pense ouais
78. E1 : 1.2
79. E2 : Non ici le dernier (1.5 ; 1.5) oui bon (1 ; 1) et (1.5 ; 1.5) c'est pareil

E1 ajoute les points (1 ; 1) et (1.5 ; 1.5) dans le tableau

80. E2 : Ensuite 2.5 et 1
81. E1 : Mais non y a celui là (il parle le point (2 ; …))
82. E2 : Mais non on s'en fou celui là
83. E1 : Non parce que…
84. E2 : Parce que ça suit si on fait ça lui trace alors… passe aussi par là donc c'est obligé
85. E1 : Si on ne mets pas ce point là ils vont directement comme ça
86. E2 : Oui vite fait ouais c'est la même chose à peu près
87. E1 : On s'en fou y a des places

Ils se mettent d'accord sur le point (2 ; 1.25) et l'ajoutent dans le tableau

88. E1 : Et quoi après ?
89. E2 : c'est 2.5 et 1 (E1 ajoute (2.5 ; 1) dans le tableau)
90. E2 : Ensuite oui… mets directe le dernier (4 ; 0.5)

E1 met directement le point (4 ; 0.5)

91. E2 : Après on écrit quoi ? On écrit placer tous ces points sur un repère et joindrez les

Ils discutent après sur le type de repère (orthogonale ou ortho normale)

92. E1 : Après placer ces points on dit pas rejoindre les points c'est bon on s'en fou
93. E2 : Ouais placer ces points dans un repère puis les joindrez les uns après les autres

E1 commence à recopier sur le transparent

94. E1 : Compte ! Combien y a de truc ?
95. E2 : Alors…12 points (il compte les valeurs du tableau qu'ils ont mis sur le brouillon)

E2 recommence à compter les points sur la courbe puis il a dit pour lui-même « normalement 8 points normalement »

96. P : Vous en êtes où?
97. E2 : Oui oui on a fini
98. P : Bon d'accord

### *2) Deuxième groupe : binôme d'élève (E1 et E2)*

Voici leur message final :

*Placer 2 axes perpendiculaires avec x comme abscisse et y en ordonnée avec les informations suivantes :*

| x | -4 | -3 | -2 | -1 | -0.5 | 0.25 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 2 | 1.5 | 1.25 | 2 | -0.5 | 0 | 1 | 1.40 | 0.75 | 0.5 |

1. E1 : On a droit de faire un tableau
2. E2 : Non non justement
3. E1 : On n'a pas droit de faire un tableau ?
4. E2 : Non c'est un paragraphe rédigé. Tu dit -4 abscisse correspond -2 ordonné de y
5. E1 : (Rire) fais un tableau !
6. E2 : Mais non ils ont hé…
7. E1 : On a droit de faire un tableau, Monsieur ?
8. C : Tous que vous voulez sauf une courbe (Jean-Luc a dit)
9. E1 : Bon
10. E2 : Ben d'accord ben voilà

E1 commence à construire un tableau

11. E1 : Tracer…
12. E2 : Tracer la courbe en fonction des infos données dans le tableau. (Il écrit cette phrase sur le brouillon)
13. E1 : Attend attend (elle a pris le feuille) -4 et 2
14. E2 : Tu mets -4 dans les points des x et pour y c'est 2
15. E1 : Après… -3.5
16. E2 : -3.5 correspond… on vérifie tous les chaque points (Il parle les valeurs entiers) on fait tous les chaque points après on relie la courbe
17. E1 : Ils vont faire comme ça (elle montre sur la courbe que sur [-4 ; -2.5] si on précise pas le point pour x=-3.5 les autres peuvent tracer différemment !)
18. E2 : Non non il y a une troisième point là qui est là (il parle le point (-3 ; 1.5)) ils vont relier ainsi !
19. E1 : Ah oui là
20. E2 : -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 et 4 (il fait rédiger tous les valeurs entiers de x sans regarder les valeurs y)

| x | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 2 | | | | | | | | |

21. E1 : Fini alors -3 (ils cherchent ensemble la valeur de y pour x = -3)
22. E2 : 1.5 (E1 a écrit dans le tableau)
23. E2 : -2...environ… 1.5

Ils vérifient ensemble pour x = -2

24. E2 : Ah 1.25, 1.25

E1 a écrit 1.25 dans le tableau

25. E2 : -1 c'est 2

E1 a écrit 2 pour x = -1

26. E1 : Après 0
27. E2 : Putain y a celui là aussi (il montre le point (-0.5 ; -0.5)) c'est -0.5
28. E1 : 0.75
29. E2 : 0.75
30. E1 : Regarde ! on peut le faire (elle suit la courbe sur [-1 ; -0.5]) ça fait comme ça c'est bon
31. E2 : Oui t'as raison donc ça fait…
32. E1 : 0.5
33. E2 : Non -0.5
34. E1 : Mais on n'a pas mis -0.5 dans le tableau
35. E2 : C'est pas grave c'est un brouillon refait !

E1 ajoute la valeur -0.5 entre -1 et 0

36. E2 : Tu mets -0.5 c'est pareil (pour x = -0.5)

E1 ajoute le point (-0.5 ; -0.5) dans le tableau

37. E1 : Après ?
38. E2 : Pour 0… attend 0 là y a rien du tout 0 y a rien, 0 ?
39. E1 : Pourquoi y a rien à 0 ?
40. E2 : Attend 0 en x … 0 en y… (il a l'aire de mélanger les valeurs pour x = 0 et pour y = 0)
41. E1 : Mais si ça fait ça (elle le montre le point (… ; 0))
42. E2 : Mais c'est pas 0 ça, ça sera 0.25

Après avoir discuté sur les valeurs « exacte », Ils décident d'écrire le point (0.25 ; 0) et ainsi ils laissez tomber la valeur x = 0, pourtant ils l'ont déjà mis dans le tableau. De plus ils n'ont pas écrit le valeur (0.25 : 0) sur le brouillon.

43. E2 : Commence à faire un tableau sur le transparent ?
44. E1 : Allez on le fait direct.

Ainsi ils laissez vide certains valeurs de y (pour x = 0, 1, 2, 3, 4) dans le tableau sur le brouillon. Donc voici le tableau de valeurs qu'ils ont construit sur le brouillon :

| x | -4 | -3 | -2 | -1 | -0.5 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 2 | 1.5 | 1.25 | 2 | -0.5 | | | | | |

45. E1 : Il faut dire « dresser deux axes perpendiculaire avec x pour abscisse et y pour ordonné

Ils écrivent ensemble « tracer 2 axes perpendiculaires avec x comme abscisse et y en ordonnée avec les informations suivantes ». E2 commence à écrire cette phrase sur le transparent.

Ils recopient les points (-4 ; 2), (-3 ; 1.5), (-2 ; 1.25), (-1 ; 2), (-0.5 ; -0.5) et (0.25 ; 0) sur le brouillon sans discussion et sans vérifier sur la courbe.

46. E1 : Après… pour… 0.5
47. E2 : (c'est lui qui écris cette fois ci !) pour…pour 1(il regarde à la courbe)
48. E1 : Pour 0.5
49. E2 : Après 1 (il n'écoute pas son amie !)
50. E1 : Non pour 0.5 c'est 0.5 là (elle le montre le point (0.5 ; 0.5))
51. E2 : (il a écrit 1 pour x dans le tableau et il cherche le valeur de y pour x = 1) pour 1 ça fait…
52. E1 : (elle voit qu'il a écrit 1 dans le tableau) Ah non c'est 0.5 regarde ! (Elle le montre le point (0.5 ; 0.5))
53. E2 : Non c'est autre chose (avant de regarder la courbe)
54. E1 : Regarde ! C'est 0… attend 1…
55. E1 : Oui c'est 1
56. E2 : Pour 0 ah oui oui c'est 0.5 pour…
57. E1 : 1 virgule… pour 1
58. E2 : Tu la mets… tu a mis quoi pour 1
59. E1 : Après… 2…ça donne...1,15
60. E2 : Ah non 1.25
61. E1 : mais non ah oui t'as raison t'as raison
62. E2 : 1.40

E1 écrit le point (2 ; 1.40) dans le tableau

63. E1 : Après 3 (sans regarder la courbe il a écrit 3 pour x dans le tableau)… 0.75
64. E1 : Et 4 c'est 0.5
65. E2 : C'est fini !

### *3)Troisième groupe : binôme d'élève (E1 et E2)*

Voici leur message final :

*Soit une courbe avec les points*

*(-4 ; 2)*

*(-3 ; 1.5)*

*passez entre (-2 ; 1) et (-2 ; 1.5)*

*(-2.5 ; 0.5)*

*(-1 ; 2)*

*(0.5 ; -0.5)*

*(0.5 ; 0.5)*

*(1.5 ; 1.5), (2.5 ; 1) et (4 ; 0.5)*

*Tracez cette courbe à la main sans faire de droite*

1. P : On va faire aujourd'hui un travail en deux étapes dans un premier temps… alors les deux groupes qui sont au fond et un groupe qui est au milieu eh bien ils vont avoir une feuille sur laquelle il y a une courbe qui est tracée et ils vont essayer de rédiger un texte qui donne des informations sur la courbe du manière à ceux que… quand ils seront passé le texte aux autres groupes je vais expliquer lesquels, eh bien le groupe qui reçoit le texte soit capable de reconstituer la courbe.
2. E1 : Ah d'accord j'ai compris ce qu'il a dit
3. P : Alors dans le premier étape ceux qui vont rédiger un message vont avoir une dixième de min. pendant ce temps les autres groupes vont avoir une activité à faire qui sera une activité de tracé Et puis dans le deuxième temps de travail en ce moment là on serait échangé eh bien cet activité de tracé sera pour les autres. Bon on va repasser au près de chacun pour expliquer s'il a besoin de quelque chose.

P repasse et explique qu'il faut utiliser d'abord la feuille de brouillon puis quand ils sont sûr de leur réponse ils peuvent la rédiger sur le transparent.

E1 et E2 commence à regarder la courbe donnée.

4. E1 : Voilà déjà le premier point on va faire point par point …premier point…
5. E2 : Mmh.
6. E1 : Alors donc le premier point y a (-4 ; 2)
7. E2 : Mmh.
8. E1 : Ensuite le…
9. E2 : Euh -1
10. E1 : Euh -2.5 (il montre le point (-2.5 ; 0.5)
11. E1 : 0.5 (pour x = -2.5)
12. E1 : Ensuite (-1 ; 2)
13. E2 : Voilà ensuite euh…
14. E1 : (-0.5 ; -0.5)
15. E2 : Ouais ça fait comme ça houp (il suit la courbe à cette endroit)
16. E2 : Ensuite euh 1.5 euh 1.5
17. E1 : Ça...(il montre le point (0.5 ; 0.5))
18. E2 : Non celle là (il montre le point (1.5 ; 1.5)
19. E1 : Disons (0.5 ; 0.5)
20. E2 : Ouais
21. E2 : Ensuite euh (1 ; 1)
22. E1 : Non (1.5 ; 1.5) (il l'a écrit)
23. E2 : Hein ! ensuite (2.5 ; 1)
24. E2 : Ensuite (0.5 ; 4)
25. E1 : Non c'est (4 ; 0.5)
26. E2 : Ah oui c'est l'abscisse qui est 4
27. E1 : Maintenant on va essayer… mettons… euh…o là là… On va passer une grille en fait pour refaire
28. E2 : Une quoi ?
29. E1 : Une grille
30. E2 : Himm
31. E1 : Pour essayer pour…pour voir celui qui fait ça… parce que là ça ça ça ça ça ça ça ça (ils regardent les points qu'ils ont choisi) ça fait que après il va dessiner ils vont dessiner (il tracent une courbe lisse à partir des points qu'ils ont choisi sur le repère)
32. E1 : A part de ce côté (il parle la courbe qu'il vient de tracer sur [-4 ; -1]) la reste est à peu près la même
33. E2 : Ben on peut pas mettre des points…mettre chaque point.
34. E1 : On dirait… là là (Il montre le point (-3 ; 1.5))

35. E2 : Là voilà (ils se localisent sur le point (-3 ; 1.5)
36. E1 : Voilà on l'a oubli là donc ça fait… attend…-3 et 1.5
37. E2 : -3 et 1.5
38. E1 : Alors on remets toutes les trucs et on dit qu'il faut dessiner à la main en refaisant d'une courbe et non en faisant de droite. Donc mettons sur la fiche : voir … euh… non soit… on va faire une phrase bien mathématique quand même mais… intelligemment (rire)

E1 écrit «  soit une courbe avec les points suivants », recopie les points qu'ils ont déjà marqués sur la feuille. Puis ils ajoutent « tracer cette courbe à la main sans faire de droite ».

39. E2 : Ouais parce que ils vont faire quoi ? Ils vont faire… ah oui…(il suit sur la courbe les points qu'ils ont choisi) ils vont faire ça parce que là (il parle de l'intervalle [-2.5 ; -1] parce qu'il y a là-bas une différence entre deux courbes !) mais c'est pas… euh.
40. E1 : Là je pense s'il passent par là ils ont obligé de venir comme ça (il parle du point (-3 ; 1.5)) après comme ça je pense ça va quoi il y aura une droite (la partie des courbe sur [-2.5 ; -1]) qui pose en peu de problème donc ça va.
41. E2 : Euh normalement on pourrait pas donner un point ?
42. E1 : Oui on pourrait dire que ça passe entre ça et ça, entre ça et ça entre ça et ça. Ça risquait de… puff ça va être la guerre attend ! On va demander. Monsieur ?
43. E1 : Ça on a donné là des coordonnés  ça passe sur des nœuds mais là disons que si on fait ça on voit pas là tiré noir. On a dessiné comme ça parce que on a donné ce point, ce point, ce point… et c'est de faire comme ça (il suit la courbe qu'il a tracé)
44. P   : Au lieu de faire ?
45. E1 : Il doit faire comme ça et je vois pas… on dit qu'il faut ça passe entre c'est …euh… par exemple ça passe dedans (il parle de (-2 ; 1 - 1.5))
46. P   : Euh… donc voilà c'est possible
47. E1 : D'accord on va mettre un intervalle. Donc après deuxième avant troisième (il parle des points qu'ils ont marqués)

E1 écrit « passez entre (-2 ; 1) et (-2 ; 1.5) ». E2 vérifie sur la courbe

48. E2 : Donc oui d'accord ok on fait comme ça ok.
49. E2 : Monsieur c'est bon !
50. E1 : Ça va un truc comme ça ?
51. P   : je ne peux pas dire euh…
52. E1 : Ah ! Il faut pas dire ah d'accord
53. P   : On va faire une mise en commun après hé !
54. E1 : C'est bon à peu près mais quand on a plaine des points comme ça on les met ici, il y a une façon particulière de les écrire ?
55. P   : Tu peux les écrire comme tu veux
56. E1 : Ah bon on va écrire comme ça alors

Puis ils recopient sur le transparent ce qu'ils ont écrit sur le brouillon !

### 4) *Quatrième groupe : binôme d'élève (E1 et E2)*

Voici leur massage final :

*Tout d'abord, le résultat final devra ressembler à une courbe non régulière*

*Le repère a pour abscisse x et pour ordonnée y.*

*Place un premier points [-4 ; 2] ; un autre points [-3 ; 1.5] ; un points [-0.5 ; 0.5] ; un points [-1 ; 2] ; ensuite un points [-0.5 ; -0.5] ; un points [0.5 ; 0.5] ; un point [1 ; 1] et [1.5 ; 1.5] ; ensuite [2.5 ; 1] ; puis le points final [4 ; 0.5]*

1. E2 : Ça c'est quoi ? C'est un brouillon c'est ça ?
2. E1 : Ouais ouais j'ai compris c'est un truc de brouillon puis après on remets sur ça

3. E2 : En fait il faut dire des trucs sur la courbe
4. E1 : Ouais j'ai rien compris. Ah ben oui il faut donner des coordonnées si le… euh…

P vient et dit qu'il faut débarrasser les autres choses sur la table !

5. E1 : Non parce qu'on sait pas ce qu'on va faire. Il faut écrire des coordonnées ? (il demande à P)
6. P : Vous avez compris ce qu'il fallait faire ? T'as compris ?
7. E1 : Non
8. P : D'accord je reprend : Vous avez une courbe tracé. Ce que vous demande de faire c'est de rédiger un texte qui donne des informations nécessaires, ensuite eux ils soient capables de la refaire le tracé. Simplement votre texte ne doit pas comporter des courbes.
9. E1 : C'est simple !
10. P : Ben… Alors de point de vue pratique vous avez une feuille de brouillon quand vous serez d'accord vous rédigiez votre texte sur le transparent
11. E1 : Mais euh… Tout simplement par exemple je peut le dire le point… part -4 et…
12. P : Ben non non à partir de maintenant je peux rien dire
13. E1 : C'est tranquille ( dit à son ami)
14. E2 : Attend monsieur c'est des abscisses et euh…
15. P : Moi je ne peut plus (et il s'en va)
16. E1 : Alors tu va faire tracer une courbe qui n'est pas régulière déjà et elle part le point -4 et 2
17. E2 : En fait il faut donner à ce moment là, à ce moment là, à ce moment là, à ce moment là (il suit les droites perpendiculaires du repère, ce qui fait que les valeurs demi-entières de x)
18. E1 : Non en fait à ce moment là on va pas (il parle le point x = -3.5 où y a pas de croisement exacte !!!). Il faut dire directement tu vas là en fait il faut dire ce point là et ce point là (il parle les points qui peuvent être lier facilement sur le repère)
19. E2 : Ben non réfléchis si tu dit ce point là et ce point là il va faire quoi ? Il va faire ça (il montre une droite avec son crayon)
20. E1 : Mais t'as aucun induction regarde ça, ça veux dire que, ça ? (il montre un point qui n'est pas précis !)
21. E2 : Mais non, dit à peu près !
22. E1 : Mais non tu lui dit il faut faire une courbe il faut que le tiré est toujours arrondie… en fait…euh tu lui dit… on dit qu'il faut d'abord, trace les points, les points c'est ce point là, ce point là, ce point là…(les points où soit la fonction change du sens, soit les points bien précis) et puis après tu voit là tu fait tous ça euh fait que des point de courbe.
23. E2 : Oui mais en leur expliquant que tracez l'axe euh …tracez… euh (il parle du repère et les axe)
24. E1 : Oui… alors euh il faut dire tracez un axe orthogonale euh… orthonormé ou orthogonal…

Ils discutent beaucoup sur ce qu'ils vont dire pour le repère…puis E1 rédige « Trace un repère orthonormé, avec pour abscisse x et pour ordonné y »

25. E1 : Donc déjà ça il va comprendre… attend on lui faire… deux carreaux égale un…

Puis ils essayent de mesurer les carrés….

26. E2 : Mais attend Monsieur ? Ceux qui devront reproduire cette courbe ils auront une feuille comme ça pareil ?
27. P : Ils auront… disons…un papier
28. E1 : Un papier mais… mais sans rien ils devront faire ça, ça et ça (les axes et le quadrillage) Ils auront pas des abscisses et des ordonnées ?
29. P : Euh…
30. E2 : Leurs papiers seront cadrés comme ça ?
31. E1 : C'est parce qu'on sait pas, pour savoir qu'est ce qu'on va leur donner au départ

P s'en va sans rien dire et revient pour dire qu'ils auront des axes et le quadrillage

32. E2 : On a pas besoin de dire tracer alors… ?

P n'ajoute rien comme explication.

33. E1 : Non ça ils aurons ça ferait beau !

34. E2 : il sera gradué aussi leur euh… ?
35. E1 : Ah oui oui il faut savoir… (sans explication non plus de la par de P)
36. E2 : On va marquer alors graduez…
37. E1 : Alors… graduez de 1 et 1 tous les deux carreaux
38. E2 : Non non tu marque… « une unité est égal à deux carreaux »
39. E1 : (après avoir écris cette phrase) point alors il faut que tu trace une courbe déjà… tout d'abord…
40. E2 : En fait déjà on dit on gradue l'abscisse de -4 … 4
41. E1 : Mais essaye de lui dire… euh… il faut lui dire…
42. E2 : Déjà on dit la courbe débute en abscisse -4
43. E1 : Mais bien sûr mais…déjà on va lui dire de faire de petite croix de petit point à l'endroit où on lui dit et puis après tu débarrasse tous les points de tous relier en faisant une courbe.
44. E2 : Ouais… on dit…
45. E1 : ceci s'il remplit par des droites, ça fera pas une courbe.

Après ils continuent à discuter comment on peut expliquer la graduation ! Puis ils commencent à écrire sur le transparent.

« Tout d'abord, le résultat final devra ressembler à une courbe non régulière. Le repère a pour abscisse x et pour ordonnée y »

46. E1 : Puis après « place un premier point [-4 ; 2] ». Monsieur ? on écrit comment ? quand on écrit comme ça on écrit d'abord abscisse ou ordonnée ?
47. P : Abscisse
48. E1 : Ah c'est bon on va marquer comme ça
49. E1 : Donc le premier point [-4 ; 2], ensuite un autre point…
50. E2 : 1, 5…
51. E1 : Un autre point donc… (il regarde la courbe) -3 et 1.5, ça se dit ?
52. E2 : Ouais
53. E1 : T'es sûr ?
54. E1 : (pendant qu'il écrit) j'ai pas si ça se dit les…
55. E2 : Si si ça se dit.
56. E2 : euh… de suite -2.5 et 0.5
57. E2 : Ensuite…
58. E1 : Ensuite ça monte ensuite
59. E2 : Ah merde on s'est trompé je crois ! On a fait celui là on a fait -3
60. E1 : C'est pas c'est -4
61. E2 : Puis -3 après
62. E1 : -2.5
63. E2 : Tu l'as fait
64. E1 : Oui on a fait (-2.5 ; 0.5) et là on monte là. Elle monte à -1
65. E2 : et 2

E1 écrit le point (-1 ; 2)

66. E2 : Ensuite euh… (-0.5 ; -0.5) (ils se sont mis d'accord sur ce point là)
67. E2 : Ensuite 0.5 et 0.5
68. E1 : Oui (il regarde la courbe et il l'écrit sur le transparent)

A partir de là, E1 se dépêche d'écrire et ne fait pas attention à la courbe !!!

69. E2 : Ensuite 1 et 1 à peu près (1 ; 1)
70. E1 : 1 et 1 t'es sûr ? (sans regarder la courbe il commence à l'écrire)
71. E2 : oui c'est à peu près (il parle doucement)
72. E2 : Après 1.5 et 1.5
73. E1 : T'es sûr ?
74. E2 : Ben oui oui 1.5 et 1.5
75. E2 : Ensuite 2.5 et -1
76. E1 : Après on va directement là (en regardant la courbe il parle du dernier point)

77. E2 : Ensuite 4 et 0.5
78. E1 : Puis le point final [4 ; 0.5]

**5) *Cinquième groupe : triple d'élèves (E1, E2 et E3)***

Voici leur message final :

*Tracez la courbe d'après le tableau en utilisant un repère perpendiculaire dont IO = OJ = 1 (O.R.N)*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *x* | *-4* | *-3* | *-1* | *-0.5* | *1.5* | *2.5* | *4* |
| *y* | *2* | *1.5* | *2* | *-0.5* | *1.5* | *1* | *0.5* |

On ne entend pas ce que les élèves d'émetteurs disent…

**6) *Sixième groupe : triple d'élèves (E1, E2 et E3)***

Voici leur message final :

*La courbe est [-4 ; 4]*

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *x* | *-4* | *-2.5* | *-1* | *-0.5* | *1.5* | *4* |
| *y* | *2* | *1.5* | *2* | *-0.5* | *1.5* | *0.5* |

On ne comprend pas leurs conversations mais d'après leurs feuilles de brouillons ils ont commencé par un tableau de valeurs à abscisse entier puis ils ont changé leurs avis sur un tableau de valeurs avec les valeurs d'extrema !!!

## B. Groupes Récepteurs

### *1) Première groupe : binôme d'élève (E1 et E2)*

Ils lisent ensemble à ce que leurs camarades écrivent comme messages « *Placer ces points dans un repère O(I ; J) orthogonale pour obtenir une courbe l'échelle…* »

1. E1 : y a pas O(I ; J)
2. E2 : ils sont trompé c'est y, x
3. E1 : En plus c'est pas orthogonale c'est orthonormé déjà pour obtenir une courbe hiim… échelle… c'es quoi ça ?
4. E2 : C'est 0.5 c'est ça !
5. E1 : Ok bon ben c'est simple alors x… -4
6. E2 : Au lieu de O(I ; J) il faut mettre x et y
7. Ils commencent tout de suite à placer les points du tableau sur le quadrillage. Quand ils sont venu sur le point (0.5 ; 0.5) :
8. E2 : Hé (0.5 ; 0,5) c'est quoi cette canarie ?
9. E1 : Tu fait et tu tais !
10. E2 : (Pendant qu'il place les points) Elle est nulle votre courbe !

E1 lis les points (1 ; 1) et (1.5 ; 1.5) et E2 les placent sur le quadrillage !

11. E2 : Ah non ils sont où là !
12. E1 : y a quelque chose que je ne vois pas là !

Puis ils ont fini de placer tous les points du tableau sur le repère

13. E1 : c'est fini là !
14. E2 : Alors je regarde dernier fois si je fais bon ! (il suit les points…)
15. E1 : Comment on va relier tous ? Alors on n'a même pas quel type de point ?
16. E2 : Mais si regarde ! ça fait ça ça ça (il montre par une geste de main une courbe lisse à partir de ces points là)
17. E1 : Mais relier tous ça fait une courbe ?
18. E2 : Tu ne sait pas faire bien une courbe, toi ?
19. E1 : Non
20. E2 : Ben moi je suis quand même fort ! (rire)
21. E1 : Ben j'essaie ! Si c'est pas ça ! Bon allez
22. E2 : Bon allez, allez
23. E1 : On fait des points ! Non que est-ce que tu fais là ?

Puis ils marquent bien les points sur le repère avant de commencer une courbe ! E2 commence à relier les points

24. E2 : à moins que ça doive pas dépasser !
25. E2 : On fait à peu près ça quoi (quand il a fini de lier les points)
26. E1 : Noooon la courbe de meeeerde !
27. E2 : Tu peut faire mieux que ça ?
28. E1 : Franchement oui ! C'est parfaite laisse comme ça !
29. E2 : Ok c'est bon ! Mais eux, ça fait rire ça c'est pas une courbe !
30. E1 : On s'en fou. Maintenant on va recopier sur le transparent ! allez courage !

Puis E1 commence à la recopier sur le transparent !

31. E2 : Si c'est faut c'est pas notre faut ha (dit à prof qui passe leur voir) (Rire) C'est la faute des informations qui nous sont données.
32. E2 : Il faut dire : Ils mettent O(I ; J) mais c'était x et y que tu n'as pas compris ! T'écris pas au-dessus non ?

### *2) Deuxième groupe : binôme d'élève (E1 et E2) :*

1. P : C'est la même consigne de tout à l'heure c'est-à-dire que vous allez des essaies de brouillons ah non non non… Vous allez des essaies des brouillons et… quand vous vous serez mis d'accord sur une courbe à ce moment là vous allez tracer sur ce transparent là !
2. E1 : Oui mais ça veut dire quoi…eh.
3. E2 : On a besoin de brouillon ? mais…
4. P : D'accord on vous amène de brouillons
5. P : D'accord vous avez compris ?

E1 et E2 n'ont pas l'aire d'être compris et E1 commence à lire le message de leurs camarades.

6. P : Donc vous faites des essaies et vous le faites sur le transparent que lorsque vous êtes sur de votre réponse !
7. E1 : Bon ! il faut qu'on met ces informations là…. (en regardant le message qui donne des précisions sur le repère)
8. E2 : mais non… en fait tu mes un x là et…
9. E1 : x c'est ça et y ça regarde ils sont déjà marqué (il parle du repère donné)
10. E1 : Donc le premier point … -4 et 2 et c'est ici (il le marque sur le repère)

Après E1 marque sur le repère les trois premiers points du tableau sans discussion et tout seul

11. E1 : Je le fais et après toi  tu vas le faire et on va voir à quoi ça correspond.
12. E2 : Oui oui

Ainsi E1 marque sur le repère tous les points du tableau. Ils vérifient ensemble certaines valeurs approchées (comme 0.75 pour x=3)

13. E1 : Et voilà tu vérifie et trace pour moi
14. E2 : Mais regarde par exemple 0.25… (elle prend la règle)

Ils vérifient encore certaines valeurs par la règle par exemple 0.25 pour x=0 et donc ils ont constaté que E1 l'a placé mal et ils l'ont corrigé, puis ils commencent à vérifier tous les points

15. E1 : Alors la courbe… ça doit faire ça (il commence à tracer une courbe lisse) Donc c'est pas très… (il l'a fini et la donne à E2)
16. E2 : On vérifie
17. E1 : Allez vérifie

Ils commencent à vérifier mais ils vérifient si les points donnés sont bien placés sur le repère, pas sur le tracé. Ils n'ont rien dit sur la courbe

18. P : Il faut faire le dessin sur le transparent ! Vous êtes d'accord ?
19. E1 : Oui c'est bon nous devons les points et après on va faire le dessin (sur la transparent)

Puis E1 prend le transparent et sur lequel place tous les points du tableau

20. E1 : (commence à lier les points) ça va pas être très précis (il a tracé une courbe lisse)
21. E1 : On fait ça tu est d'accord ?
22. E2 : Oui ça va. (elle lui a rien dit comment il a lié les points…)

### *3) Troisième groupe : binôme d'élève (E1 et E2) :*

1. Obs : À partir des informations que vous sont laissé par vos camarades vous devez essayer de retrouver la courbe qu'ils avaient. Donc vous pouvez faire des essaies sur la feuille mais vous n'effacez pas trop vous essayez de garder des traces. Et chaque fois vous notez votre nom dessous et une fois que vous êtes tous les deux mis d'accord sur le tracé qui vous va bien vous le décalquez sur le transparent. C'est clair ?
2. E1 et E2 : Oui ok.
3. E1 : Vas-y on fait chacun et puis on verra. (Chacun prend une feuille de brouillon mais par contre JL en prend une pour donner à un autre groupe)

Ils commencent à lire les informations que sont données par leurs camarades.

Puis E1 place les deux premiers points sur le brouillon.

4. E2 : il faut faire une courbe.
5. E1 : (en regardant le message : « passez entre (-2 ; 1) et (-2 ; 1.5) ») Regarde c'est bizarre que ces deux points ils soient tous les deux là !
6. E2 : Eh ben pourquoi ?
7. E1 : Excuse-moi mais c'est un côté et c'est d'autre côté
8. E2 : Attend  y a d'autre après
9. E1 : Après c'est pas les points
10. E2 : Après… qu'elle passe entre euh… t'as raison ouais
11. E1 : c'est pas nous ils ont trompé !
12. E2 : (-2 ; 1) et (-2 ; 1.5)
13. E1 : Je suis sûr que ça doit être là… ben… non
14. E2 : il est où ton point ?
15. E2 : mais on ne voit pas là (E1 ne parque pas bien ces deux points sur le repère)
16. E1 : Mais c'est pas des points c'est là où on doit passer.
17. E2 : C'est-à-dire qu'elle passe entre
18. E1 : Mais non, ça passe par ces points par c'est c'est… par là !

19. E2 : Elle passe entre (il insiste sur le mot « entre »)
20. E1 : Oui mais elle passe par euh… ils ont trompé ils savent pas écrire
21. E1 : (…)-2.5 et 0.5 ça fait l'ordre franchement ça devient n'importe quoi !
22. E2 : c'est-à-dire la courbe elle fait comme ça c'est bizarre (il montre par une geste…)

Et puis ils placent les autres points sur le repère sans discussion mais E1 numérote chaque point!

23. E1 : Voilà (puis il lis le message : tracez cette droite à la main sans faire de droite) himm… Là déjà ça va faire (il suit les points par une geste…)
24. E2 : Pourquoi ils ont marqué «passez entre » ils pourrait écrire « passez par »
25. E1 : c'est qui les autres !!!
26. E2 : Oui d'accord attention !
27. E1 : Regarde ça fait comme ça … tac tac tac (à partir de point (-1 ; 2) il suit les points pour une courbe lisse !)
28. E2 : C'est bizarre que la courbe elle revienne sur elle-même
29. E1 : Oui c'est la courbe ahou ils font n'importe quoi ! (il regarde les camarades d'émetteurs)
30. Em : Quoi ?
31. E2 : vas-y vas-y (ils rient) on va voir ça donne !
32. E1 : Attend !
33. E2 : N'est pas là ton 6 hah ! (Puisque E1 fait une erreur en numérotant les points, il a passé le 6 pour le point (0.5 ; -0.5)
34. E1 : Je suis là moi
35. E2 : Mais t'as dit que c'était 7 (il comte les points donné…)
36. E1 : (rire) On apprend à compter ! (Puis il corrige les numéros qu'il donne pour les points dans l'ordre !). E1 commence à tracer une courbe « lisse »
37. E2 : Tu trace une courbe pas avec de droite

E1 continue à tracer…

38. E2 : On va retracer après ?
39. E1 : Oui sur celui là !
40. E2 : Après ça va mais c'est bizarre ce trublion
41. E1 : Non c'est fait exprès !

E1 a fini de tracer une courbe lisse puis ils commencent à recopier la courbe sur le transparent

42. E1 : Vas-y je tiens et tu fait !
43. E2 : Attend je mets les points… je mets les points d'abord ?
44. E1 : Tu fais les tirés mets les point après !

E2 commence à recopier le tracé sur le transparent. E1 veut que E2 recopie du même !

45. E2 : On met les points ?
46. E1 : Tu mets des points c'est pas de croix il a dit. (Puisque E2 marque les deux premiers points comme des croix !)
47. E2 : Donc J'sais pas (après l'avoir fini de tracer)
48. E1 : On l'aurait pris c'était des tirés normalement !... Ah non non c'est tout y a que ça comme point ! (E2 voulais marquer les autres points)
49. E2 : Si y a là…
50. E1 : C'est pas des points ça c'est là où ça passe
51. E2 : D'accord ?
52. E1 : y a que ça comme points !
53. E R : Comment vous avez tracé ? c'est une boucle ?
54. E1 : Ben oui c'est ce qui est marqué ! nous aussi ce qu'il y a !
55. E2 : J'sais pas celui qui a fait !
56. E R : Vers la fin ça va… mais on a parqué « passez entre ces points » ça veut dire que sur les deux ça veut pas dire que sur les deux, y a deux point il faut passer entre …

57. E2 : Oui c'est ce que je lui a dit mais incompris !

### *4) Quatrième groupe : binôme d'élève (E1 et E2) :*

1. E1 : Le transparent je mets à coté puis qu'on va utiliser à la fin !
2. E2 : C'est quoi une courbe non régulière ?
3. E1 : ça veut dire qu'elle n'est pas comme ça droite (en montrant par une geste) ça veut dire qu'elle est bizarre (avec une geste qu'il fait zig-zag…)

Ils commencent à lier le message « le repère a pour abscisse x et pour ordonnée y. Place un premier point [-4 ; 2] »

4. E1 : Attend (il cherche un stylo pour marquer les points sur le repère et il commence…)
5. E2 : Tu la trace à la courbe parce que…
6. Ils continuent à placer les points (-2.5 ; 0.5), (-1 ; 2), (-0.5 ; -0.5), (0.5 ; 0.5), (1 ; 1)
7. E1 : On peut pas dire qu'elle n'est pas régulière…mais si ! (il voit que à gauche les points ne sont pas alignés !)
8. (1.5 ; 1.5), (2.5 ; 1) et (4 ; 0.5)
9. E1 : Voilà vas-y je te laisse tracer ! (E2 prend le brouillon)
10. E1 : il faudrait reproduire ici sur le transparent !
11. P : Oui quand vous êtes sur de votre réponse
12. E1 : vas-y on va la reproduire après…

E2 trace une courbe lisse à partir de ces points là !

13. E1 : Elle n'est pas régulière là haut !
14. E2 : Oui c'est pas régulière.
15. E1 : On est d'accord ?
16. E2 : Oui oui
17. E1 : c'est bon alors ! (il prend le transparent) tu la trace ou je la trace ?
18. E2 : vas-y trace ! Pose dessous ! (pour que E1 la recopie)
19. E1 : Ah d'accord ! (il commence à la recopier)
20. E1 : on tracera les points après

E1 a fini de la recopier et il a marqué les points aussi

21. E1 : Monsieur ?
22. E R: (des broutes… il veut voir la courbe… E1 lui la montre)
23. E2 : C'est pas ça ?
24. E R : des brouites…
25. E1 : Oui mais vous êtes bizarres vous !
26. E2 : C'est bon là !
27. E2 commence à tracer une courbe qui change du sens entre deux valeurs
28. E2 : Si on trace comme ça … comme ça…
29. E1 : Vas-y c'est ça elle laisse tu ne trouve… ça se trouve… (il se manque de groupe récepteur et …)
30. E2 : Aoui…
31. Prof viens là-bas et E1 lui dit :
32. E1 : Ben ils disent qu'elle n'est pas régulière oui elle est pas régulière ! (en montrant la courbe qu'ils ont tracé)
33. E1 : Normalement la courbe elle doit faire comme ça
34. P : Comment ça ?
35. E1 : C'est bon comme ça ?
36. P : C'est bon ça ?
37. E1 : Non c'est ça !
38. P : Attend le problème ça soit une belle courbe qu'ils disent ?

39. E1 : Non non non  ils disent qu’elle doit ressembler à une courbe non régulière. Mais là c’est non régulier. Parce que normalement une courbe elle doit faire comme ça  (il fait une geste comme le mouvement d’une courbe de la fonction périodique)
40. E1 : Vous voyez ce que je veux dire ?
41. P : Pourquoi normalement ?
42. E2 : Mais si c’est régulière !
43. E1 : Mais si c’est vrais !
44. P   : Him…
45. E1 : Une courbe régulière ce que je veux dire elle doit faire… elle doit être  euh comment dire… je veux faire dessous (sur le brouillon)
46. E1 : Elle doit faire comme ça normalement !
47. P : ouis… euh mais tu peut écrire là « courbe regulière » avec une autre couleur
48. E2 : Monsieur c’est tous ce qu’on doit faire ?
49. E1 : Si vous êtes sur de vous maintenant c’es tout bon !
50. E1 : Et ça non régulière ?
51. P   : Attend ! si tu vas dire ça c’est une « courbe régulière » et ça c’est une « courbe non régulière » !
52. E1 : Oui voilà !
53. …
54. E2 : Tu ne l’as pas totalement comprit !
55. E1 : de quoi ?
56. E2 : Tu finiras
57. E1 : Pourquoi tu le penses ? Moi je pense à toi, mais toi tu penses à quoi ?
58. E2 : Ben oui régulière c’est la même chose !
59. …
60. E1 : Ah oui on ne peut pas faire comme ça  y a pas de point là.  C’est obligé que ça soit comme ça (il veut dire qu’on ne peut pas faire des zig-zag parce qu’il n’y a pas de point en haut et en bas c'est-à-dire des extrema…)

### 5) *Cinquième groupe : triple d’élève (E1,E2 et E3) :*

1. JL : Donc ça c’est que votre camarades vous donnent comme consigne et à partir de là on va vous donner un quadrillage et vous devez retracer… la courbe que euh… avec.
2. E1 : C’est un tableau de variations donc?
3. Obs : C’est ce que vous ont donné c’est ça.
4. E1 : Oui mais c’est un tableau de variations ?
5. Obs : Ben je ne sais pas j’ai pas autorisé à répondre à ce gens de question !

Ils lisent ensemble les points donnés et ils les placent sur le repère

6. E3 : C’est pas claire pas du tout là
7. E1 : Non mais…
8. E1 : ….
9. E2 : Oui mais à ce moment là la courbe ne passe pas par là !
10. E1 : Oui il est clair…
11. M : Oui comme l’exercice d’avant il y avait plusieurs façon de la tracer
12. E2 : Oui mais bon y en a courbe… pas de pointu qu’elle est faite mais…qu’elle dépend quoi !
13. M : J’sais pas. Parce que l’exercice d’avant on l’a bien vu que avec trois point tu peut en tracer plusieurs
14. E1 : Oui mais…en effet ça se trouve… (des bruites)
15. E2 : Oui mais on n’a pas de point donné dans l’exercice d’avant mais ici on a des points donnés
16. M : J’sais pas comment faire alors ?
17. E2 : On est bien là d’accord !
18. Obs : Essayez déjà vous mettre d’accord ! Une fois vous l’êtes vous la copiez sur la transparent !

19. E2 : Oui mais Malek n'est pas d'accord
20. E1 : Si on trace comme ça ?
21. M : Oui mais dans quel sens y a aucun indication !
22. E1 : Ben voilà !
23. M : J'ai dit pas c'est faux

(…des conversations qu'on ne comprend pas…)

24. E1 : Alors là on va mettre chacun !
25. E2 : on met deux alors
26. M : On met les deux ?
27. E2 : Oui

Ils mettent deux courbes différentes sur le transparent à la fin !

### *6) Sixième groupe : triple d'élève (E1, E2 et E3) :*

1. E1 : Elle n'est pas la même courbe que tout à l'heure ? (elle parle de l'activité 1bis )
2. P : Ah non non ça n'a rien à voir !
3. E2 : Elle… des droites…. Elle est tordue…. C'est pas possible !

Elles tracent deux courbes sur le papier : l'une est avec segments de droites et l'autre la plus lisse !

4. Obs : Vous avez tracé sur le transparent celle là mais vous en avez débattu pourquoi vous avez choisi celle là ? C'est une décision commune ou… ?
5. E1 : Parce que généralement une courbe est plus… arrondie.
6. Obs : En effet ce que vous déterminez ça et ça c'est que une courbe est plutôt arrondie !

FIN

## *Séance 3 (cours : sens de variation)*

Cette séance commence par la mise en commun sur l'activité 1 :

*Mise en commun sur l'activité 1 et 1 bis*

P fait discuter sur les tracées des groupes pour l'activité 1. Il compare chaque fois les courbes tracés par les groupes récepteurs par la courbe originale.

*Discussion sur la première courbe (groupe 1) :*

1. P : Est-ce qu'on peut dire plus globale en comparant ces deux courbes ?
2. E : On peut dire leur sens de variation sont pareils ! Autrement de -4 à -2.5 ça descend, puis ça monte…
3. P : Ce qu'on peut dire une chose peut-être autrement c'est que les deux courbes elles commencent par descendre, monter, descendre, monter puis descendre. Mais que ce renseignement là ne nous donne pas deux courbes identiques. Le fait de dire que les deux varient la même façon ne suffit pas pour que ces deux courbes se coïncident.

*Discussion sur la deuxième courbe (groupe 2) :*

4. P : Elles coïncident pratiquement ! On note quand même quelle différence finalement ? Il y a une différence ici !
5. E : Il manque un point !
6. P : Il manque un point ici, qu'est-ce que ça veut dire il manque un point ?
7. E : Elle n'est pas descendue au point de la courbe noir (la courbe originale), c'est-à-dire le point (-2.5 ; 0.5)
8. P : Ici, il y a une premier imprécision et l'autre… il y a un écart entre …
9. P : Mais est-ce que la courbe bleue varie comme la courbe noir ? C'est-à-dire commence par descendre, monter, descendre…
10. E(s) : oui
11. P : Donc, on a des variation dans le même sens ; Donc simplement encore une fois ça ne suffit pas pour que les deux courbes se coïncident.

*Discussion sur la troisième courbe (groupe 3) :*

12. P : Dans ce groupe on avait parlé un nœud. L'autre jour on a dit qu'il y a un problème dans l'ordre des points, dans les messages qu'on indiquait de courbe. On ne dit pas plus.

*Discussion sur la quatrième courbe (groupe 4) :*

13. P : j'entend c'est dommage ! Qu'est ce qui est dommage ?
14. E : Il aurait ajouté un point au niveau de (-3 ; 1.5)
15. P : Est-ce que les deux coupes varient la même façon ?
16. E(s) : oui, …
17. P : Qu'est-ce qui change alors ?
18. E : Qui descend plus vite ?
19. P : Laquelle ? celle qui est en dessous ?
20. E : Oui
21. P : Est-ce que c'est bien vrai, ça ?

22. E(s) : non
23. P : Elle descend plus vite au départ mais ici autrement !
24. P : Donc on a dit on nous manque un point. Si on ajoute un point ici est-ce qu'on aurait été suffisant ?
25. E : Oui, presque
26. P : Pourquoi tu dis presque ?
27. E : Presque… (sans explication)
28. P : Bon alors si on compare ces deux courbes, on peut donc simplement indiquer qu'elles varient bien dans le même sens mais que ces allures de deux courbes sur l'intervalle [-4 ; 4] sont différentes. Mais tout en variant dans la même sens !
29. Sur le reste on peut dire y a pas d'écart important.

*Discussion sur la cinquième courbe (groupe 5) :*

(Elle est la plus ressemblance de celle d'originale.)

31. P : qu'est-ce que vous en pensez ?
32. P : Donc les deux courbes se coïncident pratiquement. Donc elles varient dans le même sens ! Mais le point (-3 ; 1.5) est permit d'être plus précis sur l'intervalle [-4 ; 2.5]. Voilà.

*Discussion sur la sixième courbe (groupe 6) :*

34. E (s) : O la la !
35. P : Une dernière courbe, plutôt deux courbes !
36. P : Bon peu import qu'il a fait !
37. P : la courbe noir elle est bonne, la courbe bleue et
38. E : Qui est mauvaise !
39. P : Et la courbe rouge
40. P : Alors si on compare ces trois courbes, on peut remarquer quand même un point (…) enfin, comment…
41. E : Des variations ?
42. P : Des variations je crois pas, alors qu'est ce qui est commun à ces courbes ?
43. E : Y a certains points qui sont communes !
44. P : Les points, pas tous mais !
45. E : Monsieur, la courbe rouge est une courbe blague, ça ?
46. P : C'est une courbe ?
47. E : Blague !
48. P : Dans quel sens tu dis ça ?
49. E : C'est une courbe blague ça, parce que  c'est pas possible ça !
50. P : Vas-y explique ce que tu veux dire !
51. E : Une farce ! C'est pas possible !
52. E(s) : (Rire) C'est une courbe blague (ils répètent !)
53. E : Elles sont nulles ces courbes là (un autre élève)
54. P : On observe les courbes simplement on essaie pas interpréter les intentions de ce qu'on a fait !
55. P : Bon, on a dit que ces trois courbes sont passées à des points communs. Si on regarde comment elles varient, qu'est qu'on peut dire ?
56. P : On vas comparer le noir et le bleue : les variations sont pratiquement les mêmes dans la mesure où toutes les deux commencent par descendre, monter, descendre, monter et descendre.
57. P : Mais les variations qui correspondent à la courbe rouge sont différentes. Ici elle commence par descendre mais pas sur le même intervalle et les autres …Donc ici les variations sont vraiment différentes et également !
58. …

59. P : Qu’est-ce que tu veux dire Malek ?
60. Mk : je veux dire qu’il y a des certains libertés pour faire ça il y a des points mais c’est pas imposer de faire ça, de monter ou de descendre, rien ne nous empêche de faire ça !!!
61. P : Oui ! Voilà !
62. P : Donc, ce qu’on peut noter c’est que dans toutes les messages que vous avez fabriqué, eh bien chaque fois pratiquement vous avez indiqué des points en effet, sous une forme ou sous un autre soit explicitement par les points ou soit par les tableaux de valeurs
63. P : Ce qu’on constate pratiquement sur ce dernier courbe ici, c’est que finalement l’indication des points ne suffit pas pour reproduire une courbe conforme à celle qui a été donnée. Ça c’est une première remarque ! Donc il faut indiquer la variation d’une fonction.
64. E1 : En effet on peut tracer à la règle pour qu’elle conforme !
65. E : Mais non (un autre) (on entend aussi un tableau de variation !!!)
66. E1 : Ni de tracer à la main
67. P : Pourquoi tu dis ça ?
68. E1 : Si on trace à la règle ça fait en gros deux points, si on trace à la main ben …
69. P : Mais au départ elle n’était pas construit à la règle !
70. E1 : Ouais… bon…
71. P : Donc si tu veux reproduire une courbe conforme à celle de départ, elle n’était pas tracé à la règle, donc ça ne marcherait pas!
72. P : Et puis un autre remarque ce que si je reprend entre deux points par exemple [-0.5 ; 1.5] eh bien ces deux courbe sont différentes (bleue et rouge), pourtant elles varient la même sens
73. E : Non monsieur …
74. P : Attend j’ai bien dit entre … ces deux courbes sont différentes, c’est à dire que entre ces deux points je peut tracer différentes courbes qui vont monter en effet ! Donc on a pas uniquement une seule courbe qui va correspondre à cette variation là !
75. P : Bon ! donc finalement ce que l’on peut dire c’est que les tableaux de valeurs ne suffisent pas et que y a une autre information qu’il faut donner ce sont les variations des fonctions. Donc on va définir maintenant les variations d’une fonction.
76. P : Donc on va définir c’est ce qui est une fonction qui est croissante qui est correspond à une courbe qui monte sur un intervalle et une fonction qui est décroissante c’est à dire une courbe qui descend sur un intervalle !
77. P : Bon vous allez reprendre votre caille …et vous allez garder sous les yeux l’énoncé de l’activité 1 (Il l’a mis la courbe de l’activité 1 sur le tableau noir !) Alors en même temps on va revenir sur la notation qu’on a introduite l’autre jour à propos de la fonction.
78. P : Alors je vais m’intéresser à la courbe sur l’intervalle [-0.5 ; 1.5] (il montre cette partie de la courbe) et on va regarder quelque point particulier. Alors, -0.5, le point d’abscisse 1 et euh… on va prendre le plus beau… 1.5, on va prendre 0.5 aussi
79. Je vais considérer maintenant les ordonnées de ces points qui sont sur la courbe :
80. Quelle est l’ordonnée du point qui a pour abscisse -0.5 ? Alors c’est -0.5 hé !
81. Quelle est l’ordonnée du point 0.5 ? Il est voisin de 0.5
82. L’ordonné de point qui a pour abscisse 1 c’est 1
83. E : Ce n’est pas tout à fait 1
84. E : 1 virgule quelque chose
85. P : On va dire 1.25 et pour 1.5 est 1.5. Bon donc ici j’ai les abscisses ici j’ai les ordonnées correspondantes.

$$-0.5<0.5< 1<1.5$$
$$-0.5<0.5<1.25<1.5$$

86. P : Les abscisses sont rangées dans l’ordre croissant et si je regarde maintenant les ordonnées correspondantes je peux dire qu’elles sont rangées aussi dans l’ordre croissant. Donc c'est-à-dire que sur l’intervalle [-0.5 ; 1.5] eh bien les abscisses et les ordonnées sont rangées dans la même ordre. Donc ça c’est la première remarque !

87. P : Alors maintenant je me place sur l'intervalle [1.5 ; 4] On va faire le même travail on va prendre quelque point : 1.5, 2.5, 3 et 4
88. E : Et 2 monsieur en gros ?
89. P : En gros euh Je prends des exemples pour le moment hé ! Alors quelle est l'image de 1.5 ? c'est 1.5 et l'image de 2.5 c'est 1, l'image de 3 c'est 0.75 et l'image de 4 c'est 0.5 voilà !

90. P : Alors pour cet intervalle j'ai rangé les abscisses dans l'ordre croissant et les ordonnées aussi elles sont rangées dans l'ordre décroissant !

$$1.5<2.5<3<4$$

$$1.5>1>0.75>0.5$$

91. P : Donc ceci ça va nous conduire à la définition ! Lorsque la courbe monte les abscisses et les ordonnées des points correspondances sont rangées dans le même ordre. Lorsque, on dirai la fonction est décroissante, la courbe descend les abscisses et les ordonnées des points sont rangées dans l'ordre contraire. Bon (il a effacé ce qu'il a écris sur le tableau noir) Donc ça va nous conduire la définition que vous allez noter.

*2. Sens de variation d'une fonction*

92. P : Donc je dicte les définitions :

> *f est une fonction. D son ensemble de définition. Dire que la fonction f est croissante sur I, intervalle de D signifie que pour tout réel a ,b∈I, si a ≤ b alors f(a) ≤ f(b).*
> *Les nombres f(a) et f(b) sont dans la même ordre que a et b.*
> *On dit que f conserve l'ordre*

93. P : On va illustrer cette définition par un dessin (…)

93. P : j'ai représenté I en rouge j'ai choisi deux nombres a et b quelconque sur I de sort que le a soit plus petit que b. J'ai rapporté sur la courbe les points que l'abscisse a et son ordonnée c'est f(a) le point que l'abscisse b et c'est l'ordonnée f(b). Allez vous refaites le dessin !
94. P : Allez je dicte la deuxième définition :

> *Dire que f est décroissante sur I, intervalle de D signifie que pour tout réel a et b de I,*
> *si a ≤ b alors f(a) ≥ f(b).*
> *Les nombres f(a) et f(b) sont rangées dans l'ordre contraire de celui de a et b.*
> *On dit la fonction f change l'ordre.*

95. P : Bon (après avoir parlé avec Jean-Luc !) vous allez laisser la place pour illustrer. On va faire le dessin jeudi hé ! Je poursuis hé. Bon alors pour résumer pour schématiser la variation d'une fonction on va utiliser ce q'on appelle un tableau de variations. Donc on va construire la courbe de l'activité 1 et on va mettre en place le tableau de variation de cette fonction. Vous pouvez regarder sur la feuille y a courbe et on va construire le tableau de variations. Vous notez simplement tableau de variations

*Tableau de variations*

96. P : Alors, ce tableau comporte deux lignes : Dans le premier ligne je veux mettre les valeurs de x, dans le seconde ligne les valeurs de f(x) (il construit en même temps le tableau de

variations). Dans la première ligne, je vais indiquer les valeurs de x pour lesquels il y a un changement dans la variation de la fonction. Je commence d'abord par indiquer l'ensemble de définition : pour la fonction f c'est l'intervalle [-4 ; 4] que je mets en évidence ainsi. Ensuite je regarde les valeurs de x pour lesquels il y a un changement de variation. Donc on voit que la courbe descend jusqu'au point d'abscisse -2.5 donc je marque « -2.5 ». Ensuite la courbe monte jusqu'au point d'abscisse -1 et elle descend jusqu'au point d'abscisse -0.5, elle monte jusqu'au point d'abscisse 1.5 et enfin elle descend jusqu'à un point d'abscisse 4.

97. P : Ensuite les variations de la fonction par des flèches : lorsque la courbe monte eh bien je représente par une flèche qui monte, lorsque la courbe descend je représente par une flèche qui descend … et ensuite on va mettre aux extrémités des flèches les valeurs de f(x) qui correspondent … Voilà le tableau de variation de la fonction f :

| x | -4 | | -2.5 | | -1 | | -0.5 | | 1.5 | | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 2 | ↘ | | ↗ | 2 | ↘ | | ↗ | 1.5 | ↘ | |

98. P : Alors attention j'ai dessiné ici des flèches cela ne signifie pas que sur l'intervalle [-4 ; -2.5] la courbe est un segment de droite, ça signifie simplement puisque le flèche descend que la courbe descend voilà !
99. P : Vous voyez que ce tableau il me fournit comme information des variations de la fonction et d'autre part j'ai des points de la courbe. Donc déjà ces deux informations dans ce tableau hé ! Par contre si je prends par exemple l'intervalle [-0.5 ; 1.5] je sais que la fonction est croissante dans cet intervalle je sais que la courbe va passer les points (-0.5 ; -0.5) et (1.5 ; 1.5) mais par contre j'en ai aucune information sur les points intermédiaires si ce n'est que les abscisses et les ordonnées de ces points sont rangées dans les mêmes ordres !
100. P : Bon on va… (il parle avec l'observateur) il nous reste que cinq minutes (…) On va faire pour terminer un exercice on va reprendre l'activité 1bis sur laquelle chacun a travaillé (il distribue leurs réponses pour l'activité 1bis)

101. P : (Il a mis un transparent sur lequel il y a trois courbes à partir de l'activité 1bis) Bon vous vous rappelez de l'activité 1bis on avais placé trois points K, L et M. Et on vous a demandé de tracer d'autres courbes passant par ces trois points. Alors ce que je vous demande de faire maintenant vous voyez ce qui est sur le tableau noir il y a trois courbes (vert, rouge, noir) c'est de dessiner le tableau de variations qui correspond à chacun de ces courbes.

Les élèves commencent à travailler et la séance est finie sans faire les corrections.

# *Quatrième séance*

## Activité 2 :

*Exercice 1*

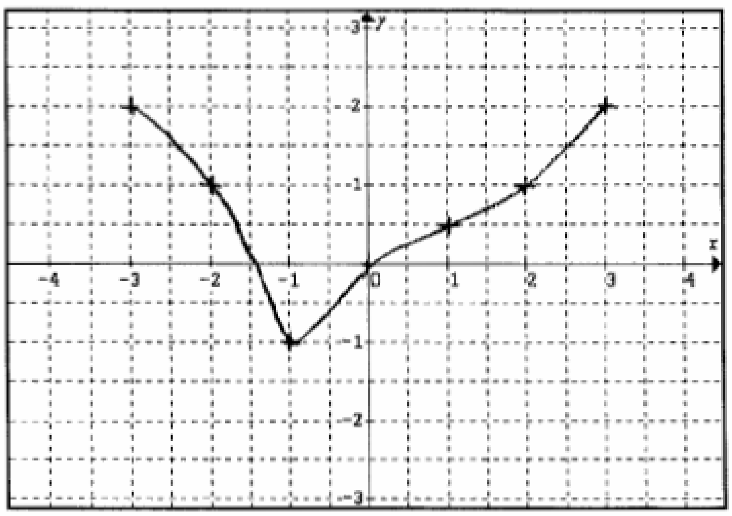
Nom : RUBY
Prénom : Arnaud

**Exercice 1**

Soit une fonction f définie sur l'intervalle [-3; 3] dont on connaît le tableau de valeurs suivant :

| ***x*** | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***f(x)*** | 2 | 1 | -1 | 0 | 0.5 | 1 | 2 |

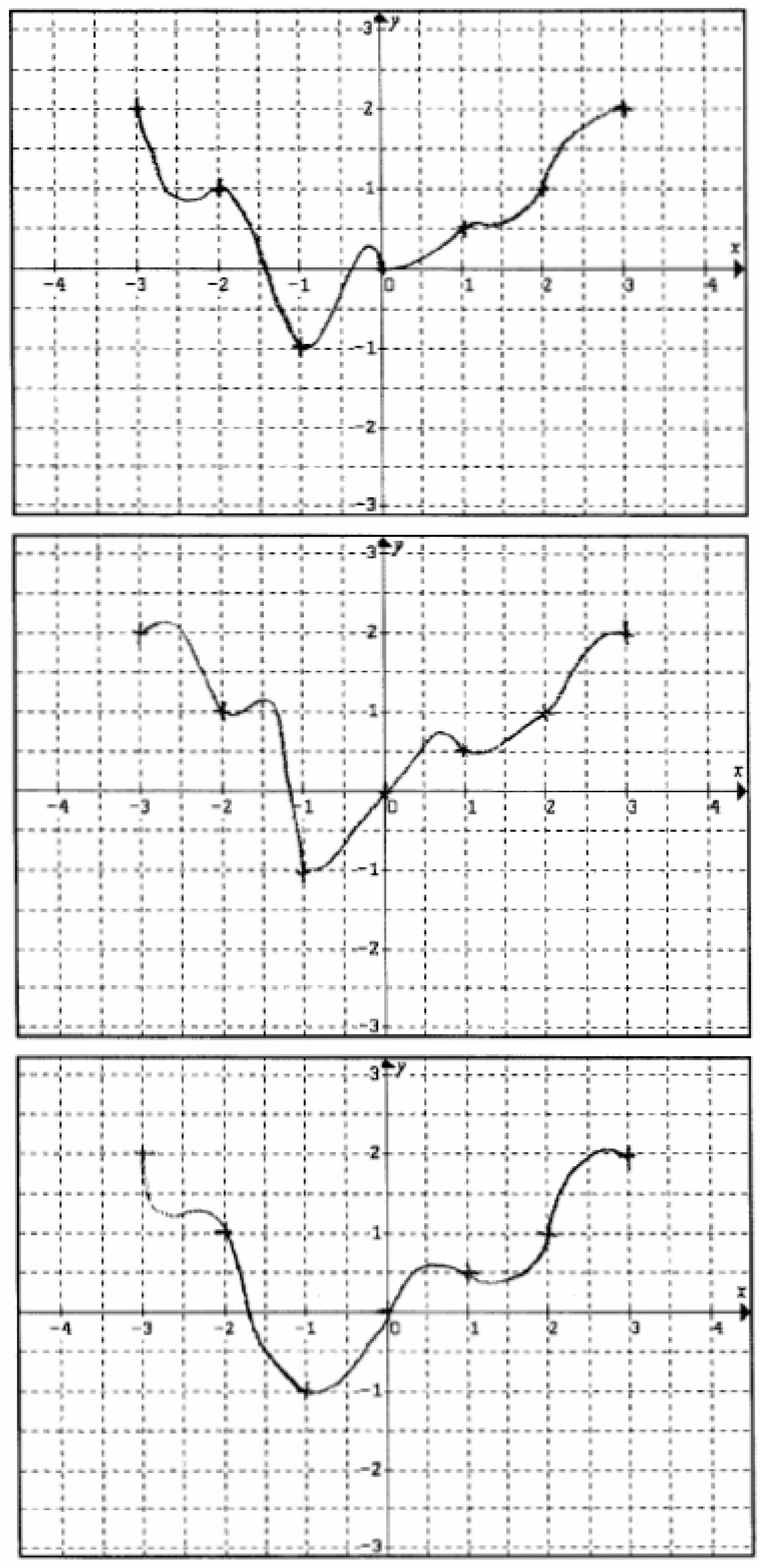
**a.** Tracer une courbe compatible avec ce tableau de valeurs.




**b.** Peut-on en tracer d'autres ? Si oui, utilisez le dos de la feuille pour donner votre réponse. Si non, expliquer.

Il y a plusieurs possibilité : en gardant ces mêmes points, la courbe peu avoir différentes formes (entre ces points).

*Le verso de l'exercice 1*



*Exercice 2*

Nom : RUBY
Prénom : Arnaud

## Exercice 2

Soit une fonction f définie sur l'intervalle [-3; 3] dont on connaît le tableau de valeurs suivant :

| *x* | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *f(x)* | 2 | 1 | -1 | 0 | 0.5 | 1 | 2 |

**a.** Complétez le tableau de variations ci-dessous pour qu'il soit compatible avec ce tableau de valeurs.

| *x* | -3 | | -1 | | 2 | | ? | | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *f(x)* | ? | ↘ | ? | ? | ? | ↘ | ? | ↗ | 2 |

Votre réponse :

| *x* | -3 | | -1 | | -2 | | 0 | | 2 | | 1 | | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *f(x)* | 2 | ↘ | -1 | ↗ | 1 | ↘ | 0 | ↗ | 1 | ↘ | 0,5 | ↗ | 2 |

**b.** Y a-t-il d'autres façons de le compléter ? Si oui, lesquelles ?
Si non, expliquez.

Il n'y a pas d'autre possibilité. La courbe reviendrait en arrière : si on inverse $x = 0$ $f(x) = 0$ avec $x = -2$ $f(x) = 1$, c'est impossible à moins de tracer une nouvelle courbe. Ce cas serait identique si ont inversait $x = -2$ $f(x) = 1$ avec $x = 1$ et $f(x) = 0,5$.

| *x* | -3 | | -1 | | 2 | | | | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *f(x)* | | ↘ | | | | ↘ | | ↗ | 2 |

| *x* | -3 | | -1 | | 2 | | | | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *f(x)* | | ↘ | | | | ↘ | | ↗ | 2 |

## *Transcription de la deuxième expérimentation*

1. P : Je vous distribue une polycopie et sur cette polycopie que vous allez travailler

   (*Elle a distribué aux élèves*). Allez vous commencez à écrire nom et prénom

2. P : Alors c'est un premier exercice donc *soit une fonction f définie sur l'intervalle [-3 ; 3] dont on connaît le tableau de valeurs suivant*, donc voilà, *tracer une courbe compatible avec ce tableau de valeurs*. Donc vous avez un repère pour ça tracez votre courbe. On vous demande ensuite répondre à une autre question : *Peut-on tracer d'autres ? Si oui, utilisez le dos de la feuille pour donner votre réponse. Si non, expliquer*. Donc voilà vous devez répondre toutes ces questions et vous avez deux pages pour ça et vous avez un quart heure.

   (*Les élèves commencent à travailler tout seul*)

3. E : Madame, si on peut en tracer d'autres il faut donner des explications ?
4. P : Si tu penses qu'on peut en tracer d'autres, tu peux expliquer pourquoi tu vas tracer d'autres et surtout tu essaie de tracer sur le dos de cette feuille. Et si vous pouvez pas en tracer d'autre pareil vous expliquez pourquoi ?

   (*P commence à distribuer des transparents à certains élèves pour utiliser pendant la mise en commun*)

5. E : Pour donner d'autres courbes est-ce que cela on peut faire en changeant la forme de la courbe ou en mettant d'autres points ?
6. P : Pour l'instant je ne peux pas répondre à cette question ?
7. P : Vous avez envie d'écrire des choses par rapport à ce que vous avez fait vous pouvez aussi, vous pouvez ajouter une phrase pour justifier pour expliquer…

   (*P a ramassé les réponses des élèves pour l'exercice 1*)

8. P : Alors l'exercice 2 je vais vous présenter après avoir les distribué.

   (*P a distribué l'exercice 2*)

9. P : Alors l'exercice numéro 2 *soit une fonction f définie sur l'intervalle [-3 ; 3] dont on connaît le tableau de valeurs suivant compléter le tableau de variations ci-dessous pour qu'il soit compatible avec ce tableau de valeurs*. Pas de souci au niveau de la question ça va ? le vocabulaire ? Donc vous devez mettre votre réponse dans la partie *votre réponse*. La question b *Y a-t-il d'autres façons de le compléter* ce tableau de variations*? si oui, lesquelles?* à ce moment là vous les donnez au-dessous*. Si non, expliquez* pourquoi vous n'avez pas d'autre possibilité. Vous avez compris ce qu'il faut faire ? oui bon alors vous commencez à répondre.

   (*P distribue des transparents à certains élèves pour utiliser pendant la mise en commun et les élèves répondent individuellement ; aucun élève n'a pas posé de question pendant qu'ils répondaient à cette question)*

10. P : ça va ? je crois que tout le monde a à peu près terminé. Alors je vais vous redistribuer la première feuille et si vous avez soit des modifications à faire soit des ajouts vous pouvez le faire sur votre premier feuille avec une autre couleur ok ?

    (*P commence à distribuer les premières feuilles des élèves sans ramasser leurs réponses à l'exercice 2*)

11. P : Donc allez si vous avez des choses à ajouter ou à modifier c'est le moment sur la première feuille mais avec une autre couleur. Vous n'effacez surtout pas ce que vous

aviez mis tout à l'heure vous les laissez vous pouvez barrer à la rigueur ou rajouter comme vous voulez mais vous l'effacez pas.

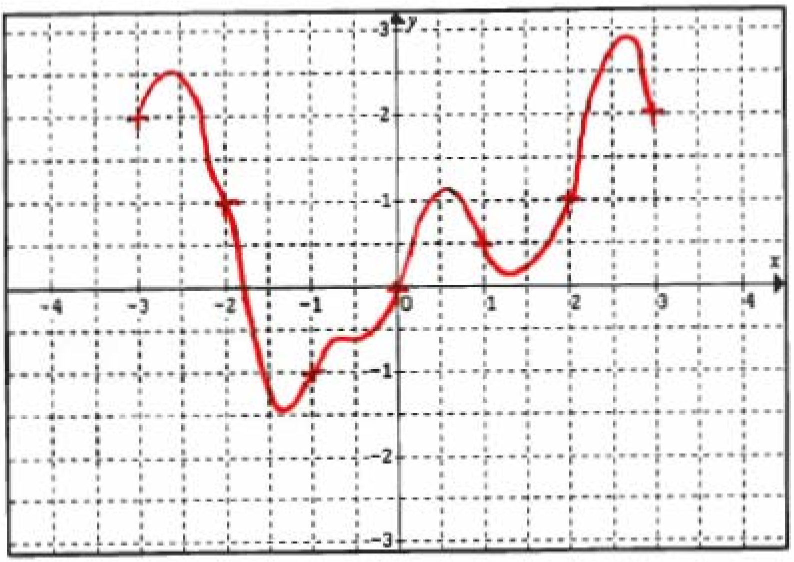
12. P : Pendant que vous faites des modifications ou les rajouts qui c'est qui a changé des choses sur sa première feuille ? (*Quelques élèves répondent qu'ils ont fait des modifications et P les distribue des transparents*)
13. P : Après on va vous demander de participer à faire un point… et donc gardez en peu…

## Mise en commun

Quand les élèves ont terminé de répondre à cette activité, le professeur a commencé, sans ramasser leurs réponses, avec le commentaire suivant :

> « *Alors vous écoutez bien. Vous avez sous les yeux vos documents. Donc, on va examiner certaines conditions que vous avez reproduites sur les transparents. Donc j'aimerais que vous disiez ce que vous pensez à ce que je vous montre. Il ne faut pas me dire ben ça c'est pas ce que j'ai fait et maintenant détachez-vous un peu de ce que vous avez fait tout à l'heure et regardez à ce qui est proposé là. Si vous avez des choses à dire, eh bien levez la main et dites le. C'est bon ? Est-ce qu'il y a des questions avant par rapport à ce que vous avez fait, il y a des questions qui vous tourmentent ? Non! Ça va ? Bon alors…* »

Le professeur a ainsi mis la première courbe tracée par un élève, sur le rétroprojecteur pour montrer aux élèves :




2. P : Alors j'ai obtenu cette courbe. Vous avez la question et le tableau de valeurs sous les yeux. Et donc, est-ce que vous avez des choses à dire par rapport à cette production ? Est-ce que ça ne correspond pas à ce que vous avez fait ? Est-ce que vous l'accepteriez comme courbe possible ?
3. Vas-y E2 ?
4. E2 : Ca correspond bien à l'énoncé puisque les valeurs données sont bien euh… positionnées et la courbe elle passe par là.
5. P : Tu peux venir nous montrer là. Allez !
6. E2 : (*Elle se trouve devant le tableau noir et elle montre sur la courbe*). Par exemple, la courbe passe par tous les points qui se trouvent dans le tableau de valeurs (*elle montre les points du tableau sur la courbe tracée*).

7. P : D’accord ! donc, on doit bien mettre en évidence les points qui correspondent aux valeurs du tableau. Donc, ça c’est une remarque qu’elle passe bien par tous les points. Est-ce qu’il y a autre chose à dire ? Parce que, la courbe, elle n’est pas définie uniquement par ces points qui sont marqués par des croix. Vous avez des choses à dire ?

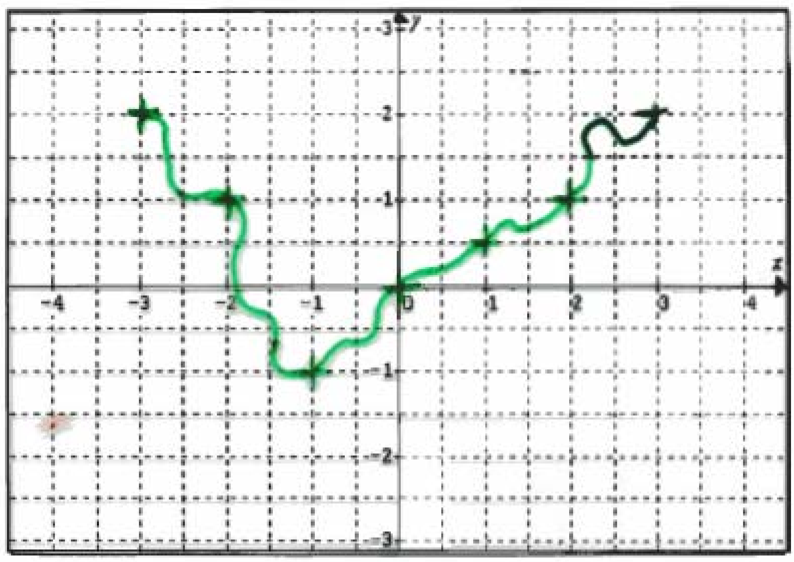
(Il y a des bruits mais *aucun élève ne répond à cette question*).

8. P : Non ? Est-ce que tout le monde accepte cette courbe comme courbe possible ? Parce que tout le monde ne l’a pas donnée. E15 vas-y !
9. E15 : Non, chaque abscisse n’a qu’une image.
10. P : Tu dis que chaque abscisse n’a qu’une image. Pourquoi tu dis donc que c’est non ?

(*E15 n’arrive pas répondre à cette question !*).

11. P : Quelqu'un peut l’aider à ce qu’il est en train de dire ? E25 ?
12. E25 : C’est la définition d’une fonction que chaque x n’a qu’une seule image.
13. P : Chaque x ne peut pas avoir plusieurs images. Alors comment en rendre compte là ?
14. E25 : Ben chaque point de la courbe … y a pas de ligne droite (*Elle montre par un geste une droite verticale*) et y a pas de retour en arrière.
15. P : D’accord ! C’est ça que vous voulez dire ? Vous êtes d’accord avec ça ? On accepte cette courbe ? Bon, alors :

    *Le professeur a ensuite mis une deuxième courbe tracée par un élève, sur le rétroprojecteur :*

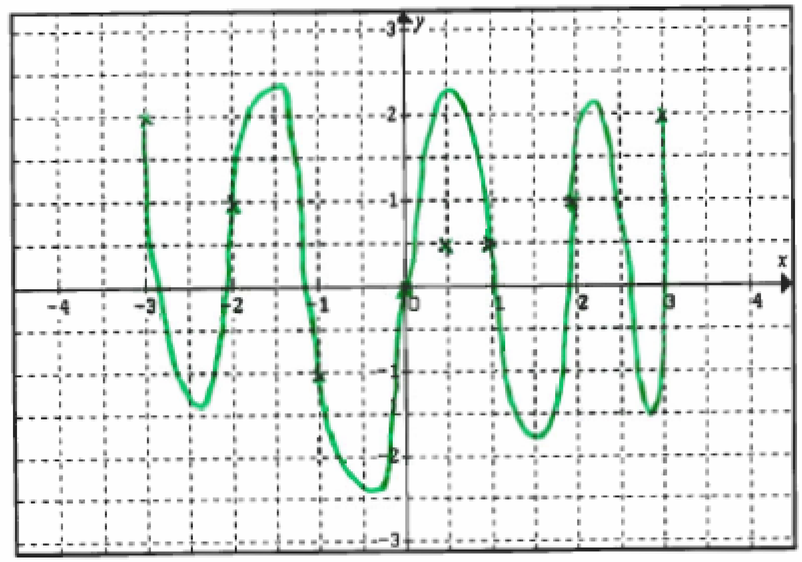



16. P : Est-ce qu’on accepte celle-ci ?
17. *(La plupart des élèves donnent tout de suite la réponse suivante)* : « Non, parce qu’il y a des retours en arrière ».
18. P : Il y a des retours en arrière. Est-ce que tout le monde dit que ça ne marche pas ? On n’a pas droit de l’accepter ? Pourtant la courbe passe bien par les points du tableau là !

(*Aucun élève ne fait un commentaire sur ce point-là*)

19. P : Donc, ça fait un défaut pour la définition qu’on vient de dire. C'est-à-dire que normalement pour une valeur donnée de x, on va avoir une seule valeur possible pour l’image appelée f(x).

Le professeur a enfin mis une dernière courbe, sur le rétroprojecteur :




20. P : J’en propose une autre qui est en peu différente. Alors, elle est vraiment différente celle-ci. Est-ce qu’on l’accepte ?

(*Il y a des bruits mais aucun élève ne prend la parole pour répondre à cette question*)

21. P : Pourtant, si je regarde par exemple ces deux là (*Elle a remis la première courbe à côté de celle-ci*) Alors, que est-ce qu’elles ont en commun ? Vas-y E15 ?
22. E15 : Les deux courbes, elles passent par tous les points.
23. P : C'est-à-dire ?
24. E15 : Toutes les images.
25. P : Toutes les images ! C’est ça là l’idée ?
26. E ? : Tous les points qui sont donnés par le tableau de valeurs.
27. P : Tous les points qui sont donnés par le tableau de valeurs. Oui, mais en dehors de ça, elles sont quand même différentes ces deux courbes, non ?
28. E6 : Leurs sens de variations sont différents.
29. P : Alors, E6 elle est en train de parler de quoi ?

(*Les élèves commencent ensemble à rire*)

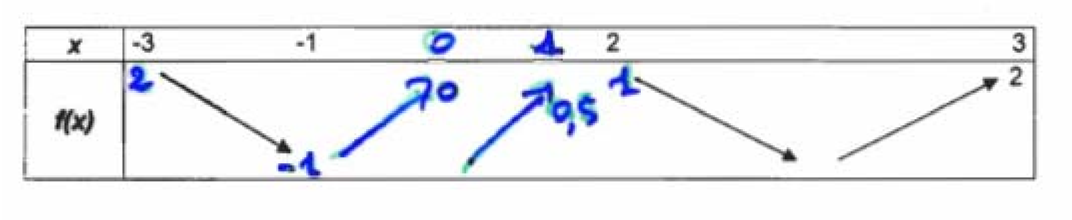
30. P : Non mais, elle est en train de parler du « sens de variation ». Alors pourquoi on a besoin de parler du sens de variation pour comparer ces deux courbes ? E23 ? C’est quoi le sens de variation ?
31. E23 : C’est euh (…) Quand la courbe monte et descend entre deux points si l’image de x augmente ou euh...
32. P : Bon alors, est-ce que celle-ci fait la différence entre les deux ? Alors essaie de m’expliquer E28 !
33. E28 : (*il est devant le tableau noir*). Entre ce point et ce point (*il montre les deux premiers points du tableau*) la courbe (n°3), elle est décroissante puis croissante, mais celle-là (n°1) elle est d’abord croissante puis décroissante.
34. P : Oui, est-ce que ça (…), dans les tracés on est autorisé à tracer comme ça ? Est-ce qu’on a le droit de descendre et de monter ou de monter et descendre après ?

(*La plupart des élèves disent qu’on a le droit !*)

35. E15 : Ben oui, on a le droit, parce que dans le tableau de valeurs, le sens de variation il n’est pas précisé.
36. P : Dans le tableau de valeurs, le sens de variation, il n’est pas précisé. Qui n’est pas d’accord avec ça ? Donc, tout le monde est d’accord. Oui E16?

37. E16 : On parle de la premier fiche, non ? Parce que sur la première fiche on n’a pas précisé le sens de variation?
38. P : On parle de la premier fiche. Oui, tu as tout à fait raison. On est toujours sur la première fiche quand on vous avait demandé des tracés et sur la première fiche il n’est pas précisé. Alors donc, si tu dis ça […] sur la deuxième ?
39. E16 : Parce que le tableau de variations est changé un peu sur la deuxième.
40. P : Comment il est changé ?
41. E16 : J’sais pas -3 et …(*y a des bruits et on ne comprend pas à ce q’il a dit*).
42. P : Alors, on va parler de la deuxième maintenant. Donc, tous celles qui étaient proposées ici sauf celle-là où il y a des retours en arrière, on a toujours à faire à des fonctions qui peuvent convenir. Alors, au niveau du tableau de variations :
43. P : Qu’est-ce qu’on vous a demandé de faire, en effet, dans cette deuxième fiche? E17 ?
44. E17 : Le sens de variation du tableau.
45. P : Le sens de variation du tableau ! Le tableau, il croit, il décroît ?
46. E(s) : *Rire*
47. E(S) : Par rapport aux valeurs indiquées dans le tableau.
48. P : Alors, avec les valeurs indiquées dans le tableau. Donc on a demandé de remplir un tableau de variations. Et j’ai vu donc… Certains ont rempli plusieurs tableaux, d’autres en ont rempli un et on dit : je ne peux pas en faire plus j’ai pas assez d’indication ! Donc, je vous montre quelques propositions qui ont été données.

*Première proposition (n°1) :*

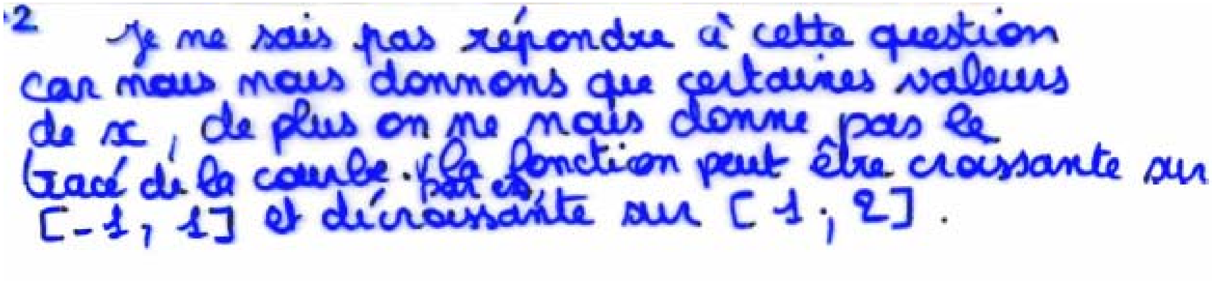



49. P : Alors j’ai celle-ci. On a un tableau qui a été proposé. Qu’est-ce que vous en pensez ? Est-ce qu’il y a des choses sur lesquelles vous n’êtes pas d’accord dans ce tableau ? E16, est-ce que tu es d’accord avec ce qui est écrit dans ce tableau, est-ce que ça peut être un tableau possible ?
50. E16 : Oui je suis d’accord avec ça.
51. P : Oui, qui n’est pas d’accord ? E7, oui ?
52. E7 : Y a deux flèches qui montent là !
53. P : Alors, E7, elle est gênée par le fait qu’il y a deux flèches qui montent là côte à côte. Oui E23?
54. E23 : C’est possible mais on aurait dû faire une seule flèche.
55. P : Bon, est-ce que ça c’est faux ? Qu’est-ce qu’on peut dire de plus?
56. E23: C’est juste mais ça nous sert de préciser qu’il y a de zéro et euh…mais c’est pas faux.
57. P : C’est pas faux. Rien plus à dire sur ce tableau de variations ? Vous l’acceptez comme tableau ?
58. E23: Non, parce qu’il manque une valeur quand la fonction décroît et une valeur au-dessus entre 2 et 3. Il manque aussi une flèche entre 1 et 2.
59. P : Alors pourquoi il manque une flèche. Il doit toujours y avoir une flèche entre deux valeurs là ?

(*Il y a des bruits et on ne comprend pas*)

60. P : Bon, voilà la première remarque. Je vous propose un autre tableau de variations. Je vous propose une autre réponse.

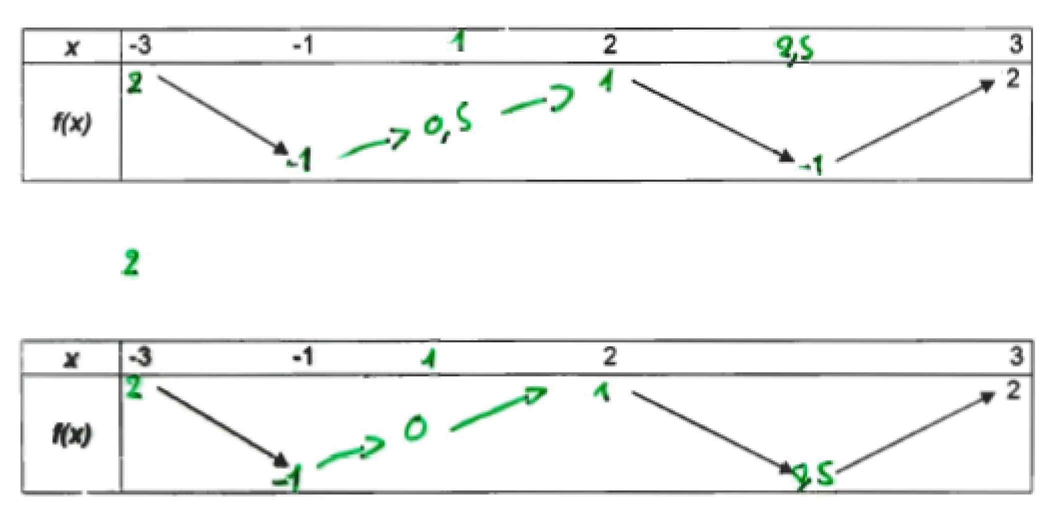
*Voici la deuxième réponse (n°2) qu'elle a proposée :*


2 Je ne sais pas répondre à cette question car nous nous donnons que certaines valeurs de $x$, de plus on ne nous donne pas le tracé de la courbe. par ex la fonction peut être croissante sur [-1, 1] et décroissante sur [1, 2].

61. P : (*Après avoir lu ce qui a été écrit sur le transparent*) Qu'est-ce que vous en pensez de ça? (*Elle s'adresse à l'élève qui donne cette réponse*) E7, c'est toi qui as fait ça. Tu veux rajouter ? Alors vas-y !
62. E7 : Je pense que ça va pas, on peut donner plusieurs tableaux compatibles avec le tableau de valeurs et donc…
63. P : Oui donc…finalement tu pourrais répondre ou pas ?
64. E7 : Ben, on pourrait compléter le tableau de variations mais… (*des bruits*)… mais une seule réponse !
65. P : Donc, c'est vrai.
66. E7 : (*Il y a des bruits, on n'entend pas ce qu'elle a dit*)
67. P : Alors, tu es en train de dire que tu pourrais produire plusieurs tableaux de variations.
68. E7 : Non par rapport à la question…
69. P : D'accord finalement tu pourrais produire. Ce que tu as rajouté c'était quoi exactement ? On n'a pas bien compris.
70. E : Ben c'est-à-dire qu'on nous a demandé de représenter la fonction. On n'a pas pu parce que … (*des bruits*)…
71. P : Donc ça veut dire que, tu voulais dire que, je résume, étant donné qu'on nous donne que certains valeurs on peut pas fournir une seule réponse. Parce qu'elle dit que entre deux valeurs on ne connaît pas le sens de variation de la fonction. Et qu'est-ce que vous en pensez ? Si on regarde le tableau : l'image de -3 (*elle demande de regarder le tableau aux élèves*) c'est 2, l'image de -2 c'est 1, l'image de -1 c'est -1, etc. Alors, par exemple, si on regarde les images comment elles sont classées à partir de -1 ? E14?
72. E14 : Dans l'ordre croissant.
73. P : Dans l'ordre croissant. Donc, sur l'intervalle [0 ; 1] si, par exemple, je veux l'image de 0.5 qu'est qu'on peut en dire ?
74. E ? : Qu'elle est supérieure à -1 .
75. P : Elle est supérieure à -1 . Alors E7 n'est pas d'accord !
76. E7 : Pas forcément.
77. P : Pas forcément elle dit, toi pourquoi tu dis qu'elle est supérieure à -1 ? Qu'est qui te fait te dire ça ?
78. E ?: (…)
79. P : Qu'est-ce que vous en pensez ? Oui E23 ?
80. E23 : Je pense que -1 c'est euh…l'image de 0 c'est 0, l'image de 1 c'est 0.5 et euh mais c'est ça que ça se trouve à 0.5 euh c'est -5 à mon avis !
81. P : C'est possible ça que l'image de 0.5 ça soit -5 ?
82. (*Quelques élèves répondent oui avec une voix faible*)

83. P : Qu’est-ce que tu dis E8 ?
84. E8 : C’est pas possible parce qu’elle est définie sur l’intervalle [-3 ; 3]
85. P : Ah E8, il dit c’est pas possible. Elle définie sur [-3 ; 3] et l’image d’un nombre ne peut pas être moins de -3 ?
86. (*des bruits*)
87. E8 : Ah oui, oui, c’est bon.
88. P : Alors c’est quoi E8 ? Que est-ce que tu viens de réaliser ?
89. E8 : (*des bruits*) J’avais pas pensé… J’avais mélangé les valeurs de x et les images.
90. (*La sonnerie retentit*!)
91. P : Alors, nous avons un autre tableau de variations (Elle l’a mis sur la rétroprojecteur)

Voici la troisième réponse (n°3)




92. P : Est-ce qu’on l’accepte comme un tableau de variations possible? Non dit E28 ?
93. E28: Parce que dans le deuxième tableau, on met 0 comme l’image de 1 donc c’est faux !
94. P : D’accord.
95. E ? : Il manque une valeur.
96. P : Laquelle ?
97. E ?: ?
98. P : Qu’est-ce que vous en pensez de ce premier tableau ?
99. E16 : Il est juste.
100. P : Qu’est-ce qui fait te dire qu’il est juste, enfin qu’il est possible ?
101. E16 : (*des bruits*).
102. P : Oui, donc tu contrôles juste qu’on a bien l’image de -3 est 2, l’image de -1 est -1 (…) l’image de 2.5 et on ne donne pas l’image de 2.5 comment je peux savoir que c’est -1 ?
103. E ? : On imagine euh… (*Des bruits*)
104. P : On imagine ! Pourquoi alors, par exemple, on ne peut pas mettre 4 ?
105. E : Ca doit être inférieur à 1.
106. P : Ca doit être inférieur à 1 ! D’accord bon. Alors, finalement pour ce problème c'est-à-dire avec ce tableau de valeurs, y avait combien de courbes possibles ? Combien on en a trouvées ? 3, 4 je ne sais plus. E12 ?
107. E12 : Y en a plein.
108. P : Y en a plein. On peut les compter ?

(*La réponse « une infinité »est donnée par quelques élèves*).

109. P : Une infinité. Et le tableau de variations ?

(*A nouveau la réponse est donnée « une infinité » par quelques élèves*).

110. P : Une infinité aussi. Alors quelle conclusion on pourrait en tirer de ça ?
111. E12 : Ca ne suffit pas d'avoir un tableau de valeurs ou quelques points de la courbe pour définir la fonction.
112. P : (*Elle la répète*) Alors qu'est-ce qu'il faudrait … (*des bruits*)…?

(*Des bruits*)

113. P : Alors E7 ?
114. E7 : Il faudrait qu'on nous donne la fonction.
115. P : Il faudrait qu'on nous donne la fonction ! C'est-à-dire ?
116. E7 : Sa formule… (*Des bruites*)…
117. P : Comment ? Il faudrait quelle information, sous quelle forme il faudrait donner des informations ?
118. E7: Avec des x.
119. P : Avec des x qu'est-ce que vous euh… oui E23 ?
120. E23 : Il faut qu'on nous donne l'expression littérale de la fonction.
121. P : Il faut qu'on nous donne l'expression littérale de la fonction ! Que est-ce que ça veut dire E11 ?
122. E11 : La formule f(x), la formule de la fonction…
123. P : La formule de la fonction. La formule qui définit la fonction. Oui ?
124. E ? : Il faudrait que la fonction soit monotone.
125. P : Il faudrait que la fonction soit monotone ! Alors si on connaît le domaine de définition si on sait que la fonction est monotone est-ce que... euh.. on l'a précisément la fonction ? C'est-à-dire qu'on n'aurait qu'une courbe possible, euh...
126. E ? : Si on connaît toutes les images.
127. P : Si on connaît toutes les images !
128. E ? : ça veut dire quoi monotone ?
129. E ? (Un autre) : Soit f est croissante soit f est décroissante.
130. P : Donc, il faudrait qu'on ait toutes les images de l'ensemble de définition ou bien il faudrait qu'on ait la formule f(x) pour avoir précisément la fonction ! Est-ce que vous avez quelque chose à rajouter ? Non ? Bon ben on s'arrête là !

**Evolutions récentes de l'enseignement de la notion de fonction en France en classe de seconde. Utilisation des tableaux de valeurs et de variations**

**Résumé**

Depuis le début de la contre-réforme des mathématiques modernes, l'enseignement de la notion de fonction au début du lycée en France a subi de profondes mutations. Une des tendances les plus importantes concerne le renforcement progressif de l'utilisation des divers modes de représentation des fonctions. Ainsi parallèlement à une diminution de la suprématie du registre algébrique, le registre graphique a acquis de nouveaux droits et il y a également une injonction forte à utiliser dans des conditions nouvelles les objets tableaux de valeurs et de variations. Notre hypothèse de recherche est, suite aux travaux de Duval, que c'est de la multiplicité des registres possibles que le concept et ses propriétés vont se dégager.

Dans notre travail, nous menons tout d'abord une analyse institutionnelle de la notion de fonction dans une perspective écologique pour dégager les différents systèmes de contraintes et de conditions qui pèsent sur les évolutions de ce savoir au cours du processus de transposition didactique interne. Ce travail s'inscrit dans une perspective commençant dans les années 80, au début de la période de la contre-réforme des mathématiques modernes. Nous faisons ensuite un état des lieux de l'enseignement actuel pour voir comment ont été traitées les nouveautés du programme par les manuels actuels et les enseignants (sur la base d'un questionnaire). Nous faisons également un état des lieux des compétences des élèves, à travers un test papier.

A la lumière des analyses précédentes, nous déterminons certaines caractéristiques de l'organisation praxéologique proposée par les nouveaux programmes de 2000 autour de la notion de fonction qui ont du mal à vivre dans l'enseignement. Nous proposons enfin une ingénierie didactique visant à faire fonctionner ces aspects du programme dans les classes et à en tester la viabilité à travers une expérimentation.

**Mots clés :**

Didactique des mathématiques, Transposition didactique, Théorie anthropologique du didactique, Registre sémiotique, Fonction, Représentation graphique, Tableau de valeurs, Tableau de variations, Ingénierie didactique.

**Recent evolutions in the teaching of the notion of function in the beginning of upper secondary school in France. Use of tables of values and tables of variations**


## Abstract

Since the beginning of the counter-reform of modern mathematics, the teaching of the notion of function in the beginning of upper secondary school in France has been subject to profound modifications. One of the most important transformations deals with the progressive reinforcement of various modes of representation of functions. In this sense, there has been a decline of the algebraic register along with a larger use of the graphic register and there is a strong demand of the institution for the use in new conditions of the tables of values and the table of variations. It is our research hypothesis, following Duval's work, that the multiplicity of possible semiotic registers brings the concept and its properties to life.

In our work, we first make an institutional analysis of the notion of function in an ecological perspective, in order to reveal the different systems of constraints and conditions that deals with evolutions of this piece of knowledge within the process of internal didactical transposition. This work is made throughout all of the counter-reform of modern mathematics, since the 80s. Then, we establish the state of art of the present teaching in order to see how textbooks and teachers (through a questionnaire) deal with the novelties of the curriculum. We also give an account of students' abilities, through results to a written test.

Based on this first analyses, we determine some characteristics of the "praxeological organisation" (according to Chevallard's terminology) included in the last reform of 2000 about the notion of function, which have difficulties to live in the actual teaching. At last, we propose a didactical enginery aiming at making these aspects of the curriculum possible in the classroom and we evaluate their viability with an experimentation.



**Keywords :**

Didactics of mathematics, didactical transposition, didactical anthropological theory, semiotic register, function, graphical representation, tables of values, tables of variations, didactical enginery.